

Arch Stanton 3

Omar Corona Tejeda¹

¹omarct1989@ciencias.unam.mx

250807



Figure 1: Hermes Trismegisto.

Contents

1		5
1.1	Consideraciones Metafísicas	5
1.1.1	Regiones acausalmente desconectadas en M	8
1.2	Teoría Cuántica de Campos Topológica (TQFT)	10
1.2.1	Revisión de Espacios de Hilbert	10
1.2.2	Sistemas Cuánticos	11
1.2.3	Definición Axiomática de una TQFT	13
1.3	Motivación de una TQFT usando el Campo de Klein-Gordon ψ	15
1.3.1	Variación con respecto al campo ψ	16
1.3.2	Variación con respecto a la métrica $\eta_{\mu\nu}$	18
1.3.3	Variación de la variedad subyacente δM	20
1.4	Regiones acausalmente desconectadas en Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT)	26
1.4.1	Motivación del uso de regiones acausales	26
1.4.2	Net de álgebras locales	26
1.4.3	De Regreso al campo de Klein-Gordon ψ	27
1.4.4	Commutador del campo de Klein-Gordon en dos puntos	29
1.5	Espacio de Hilbert de Klein-Gordon	33
1.5.1	Hamiltoniano Renormalizado	33
1.5.2	Espacio de hilbert de N osciladores armónicos desacoplados	36
1.6	Funciones de correlación en teoría cuántica de campos	38
1.6.1	Integral de camino y generador de correlaciones	38
1.6.2	Ejemplo detallado: campo escalar libre (propagador)	39
1.6.3	Interacciones: $\lambda\phi^4$ y el truco de las derivadas funcionales	39
1.6.4	Notas sobre regularización y renormalización	40
1.6.5	Comentarios finales	40
1.7	Axiomas Fundamentales de la Física	41
1.7.1	Invarianza Ecuacional de la teoría sobre un espacio definido G	41
1.7.2	Acción y Ecuaciones de Movimiento	41
1.7.3	Estructura del Grupo G	42
1.7.4	Ejemplo: el grupo $SU(2)$ como grupo de Lie	42
1.7.5	El mapeo exponencial en grupos de Lie G	47
1.7.6	Curvas integrales y pushforward	50
1.7.7	Perspectiva física y conclusión	51
1.8	Dinámica de la Teoría	52
1.8.1	Teoría Gauge Yang-Mills	52
1.9	Principio de Máxima Energía	59

1.9.1	Categoría de Funcionales	59
1.9.2	Ejemplo de la Categoría de Funcionales	60
1.9.3	Ejemplo: Klein–Gordon como ecuación funcional	61
1.9.4	Funcional asociado a la densidad de Klein–Gordon	62
1.9.5	Resolución formal para $G[\phi]$	62
1.10	Segunda Derivada Funcional de $G[\phi]$	63
1.10.1	Término $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$	63
1.10.2	Término $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$	64
1.10.3	Resultado Combinado	64
1.10.4	Nueva dinámica a partir del funcional $G[\phi]$	64
1.10.5	Cuantización del campo asociado a $G[\phi]$ en primer nivel	64
1.10.6	Cuantización del campo asociado $G[\phi]$ a segundo nivel	65
1.10.7	De la “aceleración” de $G[\phi]$ a la dinámica cuántica	65
1.10.8	Cuantizando mutuamente	66
1.11	Funcional Homotópico	67
1.11.1	Ejemplo de funcional homotópico	68
1.11.2	Ejemplo: Homotopía del funcional de acción de Klein–Gordon	69
1.11.3	Espacio de fases en una teoría de campos	71
2	Niveles de Realidad	75
2.1	Fijación Gauge en la Integral de Caminos y el Determinante de Faddeev–Popov . .	75

Chapter 1

1.1 Consideraciones Metafísicas

A toda acción le corresponde una reacción. En términos diagramáticos esto puede ser expresado como:

$$\cdot \longrightarrow \cdot \tag{1.1}$$

Una forma más consistente y precisa de describir la relación existente entre dos sería mediante una flecha de la forma:

$$\cdot \longleftrightarrow \cdot \tag{1.2}$$

Su correspondiente formulación física y metafísica es la siguiente:

No existe acción sin reacción que la provoque.

Y esto nos lleva a una nueva forma de representación diagramática más precisa con respecto a lo que queremos expresar i.e.


$$\tag{1.3}$$

Una formulación matemática de la física subyacente a partir de estas observaciones debería ser, (en principio) posible derivar o al menos intentar.

La validación de la causalidad es ampliamente aceptada. Una física (y metafísica) donde la causa sea el efecto y el efecto la causa nos lleva a la *Identificación de los Opuestos o Síntesis*.¹

Definición 1.1.1. Sean p y q dos puntos del espacio-tiempo M^{n^2} . $p \sim q$ si y sólo si existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.

¹La dualidad ha sido tratada por Hermes Trismegisto.
²

Definición 1.1.2 (Espacio-tiempo). Sea $n \geq 2$. Un espacio-tiempo de dimensión n es una variedad diferenciable M^n suave, conexa y Hausdorff, dotada de una métrica Lorentziana g de firma $(-, +, \dots, +)$. El par (M^n, g) se denomina espacio-tiempo y el tensor g recibe el nombre de métrica espacio-temporal.

La relación \sim es de equivalencia.³ De esta forma es posible definir el *espacio de identificación*:

$$Path(M) := M / \sim \quad (1.8)$$

Esto pone de manifiesto la asignación funtorial.⁴ En el caso del espacio-tiempo de Minkowski

Se define la **dimensión de la variedad** M^n como

$$dim(M^n) := n \quad (1.4)$$

. La **signatura de la variedad** M^n corresponde a la descomposición de la métrica. i.e.

Definición 1.1.3 (Signatura de una variedad). *Sea (M, g) una variedad diferenciable n -dimensional dotada de una métrica pseudo-riemanniana g . La signatura de g es el par (p, q) de enteros tal que, en cada punto $p \in M$, la forma cuadrática asociada a g_p tiene p valores positivos y q valores negativos en su descomposición diagonal.*

En particular, si $n = p + q$, se dice que g tiene signatura (p, q) .

En este punto no es necesario especificar la signatura de la variedad. Si es necesario se fijará la signatura.

³Sea X un conjunto y \sim una relación binaria en X (es decir, $\sim \subseteq X \times X$).

I) **Reflexiva:** \sim es reflexiva si

$$\forall x \in X, \quad x \sim x. \quad (1.5)$$

II) **Simétrica:** \sim es simétrica si

$$\forall x, y \in X, \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x. \quad (1.6)$$

III) **Transitiva:** \sim es transitiva si

$$\forall x, y, z \in X, \quad (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z. \quad (1.7)$$

⁴

Definición 1.1.4 (Categoría). *Sea \mathcal{C} una **categoría**, la cual consiste en:*

1. *Un conjunto (o clase) de **objetos**, denotado por $Ob(\mathcal{C})$.*
2. *Para cada par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, un conjunto de **morfismos** $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.*
3. *Para cada triple de objetos $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, una **operación de composición***

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

que asigna a cada par (g, f) el morfismo compuesto $g \circ f$.

4. *Para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$, un **morfismo identidad** $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$.*

Estas estructuras satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) **Asociatividad:** Si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow W$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (ii) **Identidad:** Para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ se cumple que

$$f \circ id_X = f \quad y \quad id_Y \circ f = f.$$

Definición 1.1.5 (Funtor). *Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste en:*

1. *Una asignación de objetos: A cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ se le asigna un objeto $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$.*

$\mathbb{M}^{1,3}$ ⁵ tenemos que

$$Path(\mathbb{M}^{1,3}) = \{*\} \quad (1.9)$$

En orden de recuperar la física subyacente del espacio, restringiremos la relación de equivalencia a una forma dependiente de la métrica i.e.

Definición 1.1.6. *Sea (M^{n+1}, g) una variedad espacio-temporal de signatura $(+, -, \dots, -)$. Sean $p, q \in M$. Se define:*

$$p \sim_g q \text{ si y sólo si } \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \text{ y } g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \geq 0 \quad (1.10)$$

La relación \sim_g es reflexiva y simétrica pero *no transitiva*. Esto define una *relación de tolerancia*⁶ en M . Además:

- Conserva la *información causal cinemática*: qué puntos están “conectados” causalmente en alguna dirección.
- Pero pierde la *información dinámica*: cuál punto está en el pasado o en el futuro, y cómo se propagan las *cadenas causales*.⁷

$$(1.12)$$

En este punto no es posible definir el espacio:

$$Path(M, g) := \{x \sim y \mid \alpha : [0, 1] \rightarrow M, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y, g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) \leq 0\} \quad (1.13)$$

debido a la *falta de transitividad*. Lo cual nos obliga a modificar la relación dada en () y optar por el enfoque de *regiones acausalmente desconectadas* que es el usado en Teoría Cuántica de Campos Algebrica⁸

2. *Una asignación de morfismos:* A cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} se le asigna un morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ en \mathcal{D} .

Estas asignaciones satisfacen las siguientes propiedades:

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ para todo objeto $X \in \mathcal{C}$.
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos los morfismos $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{C} .

⁵ $\mathbb{M}^{1,3}$ El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad diferenciable de dimensión 4, con coordenadas (t, x, y, z) y métrica pseudo-riemanniana $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Es plano, homogéneo e isotrópico, con estructura causal que clasifica vectores como temporales, espaciales o nulos, y simetrías dadas por el grupo de Poincaré.

⁶Sea X un conjunto. Una *relación de tolerancia* en X es una relación binaria $R \subseteq X \times X$ que cumple:

1. **Reflexividad:** $\forall x \in X, (x, x) \in R$.
2. **Simetría:** $\forall x, y \in X, (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$.

No se requiere transitividad.

⁷Una **cadena causal** es una secuencia de puntos $p_0, p_1, \dots, p_n \in M$ tal que

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n, \quad (1.11)$$

donde cada par consecutivo está relacionado causalmente (en dirección futura).

- Representa una **posible influencia** desde p_0 hasta p_n .
- En física, modela cómo las señales, partículas o información pueden viajar a lo largo de la variedad respetando los conos de luz.

1.1.1 Regiones acausalmente desconectadas en M

Definición 1.1.7 (Regiones acausalmente desconectadas). *Sea (M, g) un espaciotiempo lorentziano. Dos regiones abiertas $O_1, O_2 \subset M$ se dicen acausalmente desconectadas si ningún punto de O_1 puede estar conectado con un punto de O_2 mediante una curva causal (ni nula ni temporal). Formalmente,*

$$J(O_1) \cap O_2 = \emptyset, \quad J(O_2) \cap O_1 = \emptyset. \quad (1.14)$$

Aquí $J(O)$ denota el conjunto causal de O , definido como

$$J(O) := J^+(O) \cup J^-(O), \quad (1.15)$$

donde $J^+(O)$ es el futuro causal de O (todos los puntos a los que puede llegarse desde O por curvas causales dirigidas al futuro) y $J^-(O)$ es el pasado causal de O (todos los puntos desde los que puede llegarse a O por curvas causales dirigidas al pasado).

Remark 1. Los conjuntos acausalmente desconectados representan regiones del espaciotiempo que son físicamente independientes: ninguna señal, ni siquiera luminosa, puede propagarse de una a la otra. En el marco de la AQFT, esta independencia se refleja en la condición de localidad o microcausalidad, según la cual los observables asociados a dichas regiones comutan:

$$[A, B] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}(O_1), B \in \mathcal{A}(O_2). \quad (1.16)$$

Geométricamente, esto corresponde a que los conos de luz de una región no alcanzan a la otra, como ocurre con dos diamantes causales separados en el espacio de Minkowski.

Nota: En este diagrama se muestran dos regiones en forma de diamante O_1 (azul) y O_2 (rojo). Cada una tiene asociado su cono de luz (líneas punteadas). Se observa que los conos causales de O_1 y O_2 no se intersectan, es decir:

$$J(O_1) \cap O_2 = \emptyset, \quad J(O_2) \cap O_1 = \emptyset, \quad (1.17)$$

lo que implica que O_1 y O_2 están acausalmente desconectadas.

El siguiente teorema muestra que no existe una partición por conjuntos acausalmente desconectados de $\mathbb{M}^{1,1}$.

Theorem 1.1.1. *No existe una partición de $M = \mathbb{M}^{1,1}$ en regiones $\{O_i\}_{i \in I}$ tales que*

La *Teoría Cuántica de Campos Algebraica* (AQFT, por sus siglas en inglés) es un enfoque matemáticamente riguroso de la teoría cuántica de campos basado en la teoría de álgebras de operadores. En lugar de partir de campos como distribuciones operatoriales, el marco algebraico asigna a cada región abierta del espaciotiempo $O \subset M$ una C^* -álgebra o, más generalmente, una álgebra de von Neumann $\mathcal{A}(O)$ que describe los observables medibles dentro de dicha región.

La AQFT enfatiza la estructura algebraica y la localidad de los observables, evitando problemas técnicos relacionados con la definición de los campos como operadores en cada punto del espaciotiempo. En este enfoque, los *campos cuánticos* aparecen como objetos derivados (por ejemplo, como familias de operadores afilados en regiones cada vez más pequeñas).

Este marco ha demostrado ser útil para el estudio de modelos exactamente solubles en baja dimensión, la clasificación de superselecciones de carga (sectores de representación), y el análisis conceptual de la localidad y la causalidad en teorías relativistas.

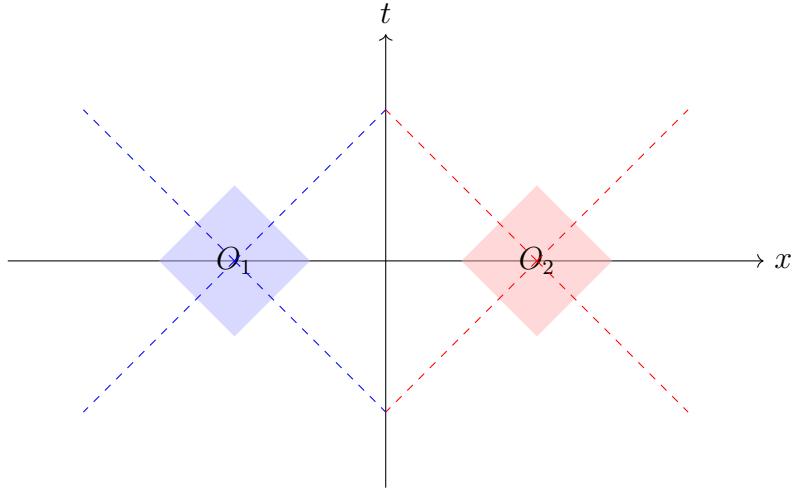


Figure 1.1: Ejemplo de dos regiones O_1 y O_2 acausalmente desconectadas en $\mathbb{M}^{1,1}$.

1. $M = \bigsqcup_{i \in I} O_i$ (cubran todo el espacio de Minkowski),
2. $O_i \perp O_j$ para todo $i \neq j$ (mutuamente acausalmente desconectadas),

donde $O_i \perp O_j$ significa que $J(O_i) \cap O_j = \emptyset$ y $J(O_j) \cap O_i = \emptyset$

Proof. Supongamos, por contradicción, que existe tal partición $\{O_i\}_{i \in I}$.

Paso 1: Punto inicial y restricción de acausalidad. Sea $p_0 = (0, 0) \in M$ y sea O_0 la región que lo contiene. Por acausalidad, cualquier otra región $O_j \neq O_0$ debe cumplir

$$O_j \cap J(O_0) = \emptyset. \quad (1.18)$$

Es decir, ninguna otra región puede contener puntos dentro del cono de luz de p_0 .

Paso 2: Interior del cono de luz de p_0 . El interior del cono de luz de p_0 es

$$C_0 = \{(t, x) \in M : |x| < |t|\}. \quad (1.19)$$

Por la definición de partición, todos los puntos de C_0 deben pertenecer a alguna región de la partición. Dado que ninguna otra región puede intersectar C_0 , necesariamente

$$C_0 \subset O_0. \quad (1.20)$$

Paso 3: Otro punto fuera de O_0 . Sea $p_1 \in M \setminus O_0$ y sea O_1 la región que lo contiene. Aplicando el mismo razonamiento, todos los puntos dentro del cono de luz de p_1 deben pertenecer a O_1 :

$$C_1 = \{(t, x) \in M : |x - x_1| < |t - t_1|\} \subset O_1. \quad (1.21)$$

Paso 4: Solapamiento de conos. Los conos de luz C_0 y C_1 se solapan en algún punto $q \in M$. Entonces $q \in O_0 \cap O_1$, lo cual viola la definición de partición, ya que cada punto debe pertenecer a una única región.

Conclusión. Como cualquier intento de cubrir todo M conduce a este conflicto, se sigue que no es posible particionar M en regiones mutuamente acausales. \square

Claramente la anterior argumentación sirve para el espacio general de Minkowski $\mathbb{M}^{1,n}$.

Theorem 1.1.2. *No existe una partición por conjuntos acausalmente desconectados de $\mathbb{M}^{1,n}$*

1.2 Teoría Cuántica de Campos Topológica (TQFT)

En orden de definir una Teoría Cuántica de Campos Topológica se necesitará revisar algunos conceptos claves de Análisis Funcional y Sistemas Cuánticos.

1.2.1 Revisión de Espacios de Hilbert

Definición 1.2.1 (Espacio de Hilbert). *Un espacio de Hilbert complejo⁹ es un espacio vectorial complejo \mathcal{H} provisto de un producto interno*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (1.22)$$

que cumple las siguientes propiedades:

- I) *Conjugado simétrico:* $\langle \eta, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \eta \rangle}$ para todo $\eta, \psi \in \mathcal{H}$.
- II) *Lineal en la segunda variable:* $\langle \psi, \alpha\eta + \xi \rangle = \alpha\langle \psi, \eta \rangle + \langle \psi, \xi \rangle$ para todo $\psi, \eta, \xi \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
- III) *Positivo definido:* $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$ y $\langle \psi, \psi \rangle = 0$ si y sólo si $\psi = 0$.

Si la condición $\langle \psi, \psi \rangle = 0$ entonces $\psi = 0$ no se satisface entonces \mathcal{H} recibe el nombre de espacio con semi Producto interno. Siempre es posible dividir el subespacio de vectores con norma cero para obtener un espacio de producto interno propio a partir de un espacio de semi Producto interno previo. Notesé que a partir de la propiedad I) y II) tenemos que

$$\langle \alpha\psi, \eta \rangle = \overline{\alpha}\langle \psi, \eta \rangle \quad (1.23)$$

- IV) *Además la norma inducida*

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad (1.24)$$

convierte a \mathcal{H} en un espacio normado completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy en \mathcal{H} converge a un elemento de \mathcal{H} .

Remark 2. A los elementos de \mathcal{H} los denotaremos por $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ¹⁰

Como ejemplo tenemos lo siguiente:

Ejemplo 1 (Ejemplo de espacio de Hilbert sobre una variedad M). *Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n , con medida de volumen $d\mu$ asociada a una métrica g ¹¹.*

⁹También es posible definir espacios de Hilbert sobre \mathbb{R} , pero estos no jugarán ningún papel importante en estas notas.

¹⁰La notación de Dirac, o *bra-ket*, es una forma conveniente de representar estados y operadores en mecánica cuántica. - $|\psi\rangle$ (*ket*) representa un vector de estado en un espacio de Hilbert. - $\langle\phi|$ (*bra*) representa el vector dual correspondiente, de manera que $\langle\phi|\psi\rangle$ es el producto interno entre $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$. - La combinación $|\phi\rangle\langle\psi|$ define un operador lineal de rango uno: actúa sobre cualquier vector $|\chi\rangle$ como $(|\phi\rangle\langle\psi|)|\chi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle|\phi\rangle$, es decir, proyecta $|\chi\rangle$ en la dirección de $|\phi\rangle$ ponderada por la componente de $|\chi\rangle$ a lo largo de $|\psi\rangle$.

¹¹La medida de volumen $d\mu$ se construye a partir de la métrica g de la variedad, y permite integrar funciones sobre M . En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , se tiene $d\mu = \sqrt{\det g(x)} dx^1 \dots dx^n$, donde $g(x)$ es la matriz del tensor métrico en esas coordenadas.

Definimos el espacio de funciones cuadrado-integrables sobre M :

$$\mathcal{H} = L^2(M) = \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_M |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}. \quad (1.25)$$

Producto interno: Para $f, g \in \mathcal{H}$, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_M f(x)^* g(x) d\mu(x). \quad (1.26)$$

Norma:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_M |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

Propiedades:

- \mathcal{H} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .
- \mathcal{H} es completo respecto a la norma $\|\cdot\|$, por lo que es un espacio de Hilbert.
- En el caso de variedades compactas, es posible construir una base ortonormal $\{f_n\}$ de autovectores del operador Laplace-Beltrami $\square_g := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$, tal que

$$\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (1.28)$$

Interpretación: Cada función $|f\rangle \in \mathcal{H}$ es un "vector" sobre toda la variedad M , y el producto interno permite definir proyecciones y ángulos, generalizando el concepto de espacio de Hilbert euclíadiano a variedades.

Nota: En el caso de que la variedad M^n no sea compacta tomaremos a las funciones de cuadrado integrable con soporte compacto i.e. $L^2_c(M)$.

1.2.2 Sistemas Cuánticos

Definición 1.2.2 (Sistema cuántico). Un sistema cuántico está descrito por los siguientes datos:

- I) Un espacio de Hilbert complejo y separable¹² \mathcal{H} , cuyos vectores $\psi \in \mathcal{H}$ (con $\|\psi\| = 1$) representan los estados puros del sistema.

¹²Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert.

- Decimos que \mathcal{H} es **separable** si admite una base ortonormal numerable $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ se cumple

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \quad (1.29)$$

- Si \mathcal{H} no es separable, entonces cualquier base ortonormal de \mathcal{H} es necesariamente no numerable. En este caso se tiene

$$x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, \quad (1.30)$$

donde I es un conjunto no numerable.

II) Los observables son operadores autoadjuntos $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. i.e. $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. siendo \hat{A}^\dagger el operador autoadjunto¹³ de \hat{A} .

III) La probabilidad de obtener un valor λ al medir un observable \hat{A} en el estado ψ está dada por la regla de Born:

$$\mathbb{P}(\lambda) = \langle \psi, \hat{P}_\lambda \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\lambda | \psi \rangle, \quad (1.32)$$

donde $\hat{P}_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda$ es el operador proyector sobre el subespacio propio \mathcal{E}_λ asociado al valor propio λ .¹⁴

IV) La evolución temporal está gobernada por un operador unitario

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (1.34)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano i.e el observable de la energía del sistema cuántico.

Como ejemplo de sistema cuántico tenemos lo siguiente:

Ejemplo 2 (Sistema cuántico de dos niveles de energía). *Sea un qubit¹⁵ con Hamiltoniano*

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

¹³

Definición 1.2.3 (Operador adjunto). *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideremos un operador lineal continuo $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (para operadores lineales, la continuidad es equivalente a que sean operadores acotados).*

El adjunto de A es el operador lineal continuo $A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que vuelve una identidad la siguiente ecuación:

$$\langle A^\dagger \phi, \psi \rangle = \langle \phi, A \psi \rangle \quad \text{para todo } \phi, \psi \in \mathcal{H}. \quad (1.31)$$

La existencia y unicidad de este operador se sigue del teorema de representación de Riesz.

Este concepto puede verse como una generalización de la matriz adjunta de una matriz cuadrada, la cual posee una propiedad análoga respecto al producto interno complejo estándar.

¹⁴

Como \hat{A} es un operador auto-adjunto (observable), todos sus valores propios λ son números reales. Sin embargo, estos valores propios no necesitan ser positivos; pueden ser negativos o cero. La positividad de la probabilidad en la regla de Born no proviene del signo de λ , sino de la acción del operador proyector \hat{P}_λ sobre el estado ψ .

El proyector asociado a un valor propio λ cumple las siguientes propiedades fundamentales:

$$\hat{P}_\lambda^2 = \hat{P}_\lambda \quad (\text{idempotencia}), \quad \hat{P}_\lambda^\dagger = \hat{P}_\lambda \quad (\text{auto-adjunción}). \quad (1.33)$$

estas ecuaciones garantizan que \hat{P}_λ proyecta cualquier estado $\psi \in \mathcal{H}$ sobre el subespacio propio \mathcal{E}_λ , y que la probabilidad de obtener λ sea siempre no negativa.

¹⁵c

Un *qubit* es el sistema cuántico más simple que puede existir: un estado en un espacio de Hilbert de dimensión 2. Su estado general $|\psi\rangle$ puede escribirse como combinación lineal de dos estados ortonormales de base, comúnmente denominados como $|0\rangle$ y $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.35)$$

- $|0\rangle$ y $|1\rangle$ forman la *base computacional* del qubit. - La condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ asegura que el estado esté normalizado. - La probabilidad de medir el qubit en el estado $|0\rangle$ es $|\alpha|^2$ y en $|1\rangle$ es $|\beta|^2$, según la regla de Born.

donde σ_z es la matriz de Pauli z .

Estados propios: Definimos la base computacional como

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\hbar\omega}{2}. \quad (1.38)$$

Subespacios propios:

$$\mathcal{E}_{\lambda_1} = \text{span}\{|0\rangle\}, \quad \mathcal{E}_{\lambda_2} = \text{span}\{|1\rangle\}. \quad (1.39)$$

Proyectores: El proyector asociado a un valor propio λ se define como el producto exterior del vector propio consigo mismo:

$$\hat{P}_{\lambda_1} = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

$$\hat{P}_{\lambda_2} = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Probabilidad de medir un valor propio (regla de Born): Para un estado general

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.42)$$

tenemos

$$\mathbb{P}(\lambda_1) = \langle\psi|\hat{P}_{\lambda_1}|\psi\rangle = |\alpha|^2, \quad \mathbb{P}(\lambda_2) = \langle\psi|\hat{P}_{\lambda_2}|\psi\rangle = |\beta|^2. \quad (1.43)$$

1.2.3 Definición Axiomática de una TQFT

Definición 1.2.4 (Teoría Cuántica de Campos Topológica). Una teoría cuántica de campos topológica (*TQFT*) en dimensión n es un functor monoidal simétrico¹⁶

$$Z: \mathbf{Cob}_n \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}, \quad (1.44)$$

donde:

¹⁶

Definición 1.2.5 (Categoría monoidal). Una **categoría monoidal** es una categoría \mathcal{C} equipada con los siguientes datos:

1. Un bifuntor tensorial

$$\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C},$$

que asocia a cada par de objetos (X, Y) un objeto $X \otimes Y$, y a cada par de morfismos $(f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y')$ el morfismo $f \otimes g: X \otimes Y \rightarrow X' \otimes Y'$.

2. Un objeto unidad $\mathbb{I} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

3. Isomorfismos naturales (llamados asociador y unitarios)

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X: \mathbb{I} \otimes X \xrightarrow{\cong} X, \quad \rho_X: X \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\cong} X,$$

que satisfacen los diagramas de coherencia de Mac Lane (asociatividad y unidad).

- \mathbf{Cob}_n es la categoría de n -cobordismos:

- Los objetos son variedades cerradas¹⁷ M^{n-1} que representan un “espacio” en un instante de tiempo
- Los morfismos son n -cobordismos entre ellas.

La estructura monoidal en \mathbf{Cob}_n viene dada por la unión ajena de variedades i.e $M \sqcup N$.

- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ es la categoría de espacios vectoriales complejos con el producto tensorial.

El functor Z asigna:

- A cada variedad cerrada M^{n-1} , un espacio vectorial $Z(M)$ (el espacio de estados),
- A cada cobordismo $W: M_0 \rightarrow M_1$, una aplicación lineal

$$Z(W): Z(M_0) \longrightarrow Z(M_1), \quad (1.45)$$

Definición 1.2.6 (Categoría monoidal simétrica). Una **categoría monoidal simétrica** es una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, \lambda, \rho)$ provista además de un isomorfismo natural de simetría

$$\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X,$$

que satisface las condiciones de coherencia

$$\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y},$$

y es compatible con la estructura monoidal, es decir, hace conmutar los diagramas de coherencia correspondientes con α , λ y ρ .

Definición 1.2.7 (Functor monoidal simétrico). Sean $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I})$ y $(\mathcal{D}, \otimes', \mathbb{I}')$ dos categorías monoidales simétricas. Un **functor monoidal simétrico** es un functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ junto con:

1. Una transformación natural

$$\Phi_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y),$$

que es natural en X e Y .

2. Un morfismo

$$\phi : \mathbb{I}' \rightarrow F(\mathbb{I}),$$

que preserva el objeto unidad.

Estos datos deben satisfacer los diagramas de coherencia que garantizan la compatibilidad con la asociatividad y la unidad:

$$\Phi_{X \otimes Y, Z} \circ (\Phi_{X,Y} \otimes' \text{id}) = \Phi_{X,Y \otimes Z} \circ (\text{id} \otimes' \Phi_{Y,Z}) \circ F(\alpha_{X,Y,Z}),$$

y además, si las categorías son simétricas, se requiere que F preserve la simetría:

$$F(\sigma_{X,Y}) \circ \Phi_{X,Y} = \Phi_{Y,X} \circ \sigma'_{F(X), F(Y)}.$$

17

Definición 1.2.8 (Variedad Cerrada). Una variedad cerrada es una variedad diferenciable M que cumple dos propiedades fundamentales:

* Es **compacta**, es decir, todo recubrimiento abierto de M admite un subrecubrimiento finito.

* No tiene frontera, es decir, $\partial M = \emptyset$.

En otras palabras, una variedad cerrada es un espacio que es finito en extensión (compacto) y que no presenta bordes ni límites. Ejemplos típicos son la esfera S^n y el toro T^n .

interpretada como el operador de evolución temporal.

La propiedad monoidal requiere que

$$Z(M \sqcup N) \cong Z(M) \otimes Z(N). \quad (1.46)$$

que corresponde a la unión disjunta de los *sistemas cuánticos* M y N .

$$Z[M] := \{|\psi\rangle|\psi\rangle \in \mathcal{H}\} \quad (1.47)$$

siendo \mathcal{H} el *espacio de estados* $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert.

1.3 Motivación de una TQFT usando el Campo de Klein-Gordon ψ

Consideremos un *campo escalar libre* ψ con masa m :

$$\psi : \mathbb{M}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.48)$$

definido sobre el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{M}^{1,3}$ con métrica $\eta_{\mu\nu}$ dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

El campo ψ satisface la *ecuación de Klein-Gordon* si

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0, \quad \text{donde} \quad \square := \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \nabla^\nu \nabla_\nu = \partial^\nu \partial_\nu, \quad (1.50)$$

siendo m la masa del campo y ∇_μ la derivada covariante asociada a $\eta_{\mu\nu}$.

La acción del campo libre es la acción para el campo de Klein-Gordon:

$$S[\mathbb{M}^{1,3}, \psi, \eta_{\mu\nu}] := \int_{\mathbb{M}^{1,3}} d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right). \quad (1.51)$$

El funcional de partición viene dado por

$$Z[\mathbb{M}^{1,3}, \psi, \eta_{\mu\nu}] := \int_{\mathbb{M}^{1,3}} \mathcal{D}\psi e^{iS[\mathbb{M}^{1,3}, \psi, \eta_{\mu\nu}]}, \quad (1.52)$$

donde el símbolo $\int \mathcal{D}\psi$ representa una *discretización* de una trayectoria del espacio-tiempo $\psi(x_1^\mu) \rightarrow \psi(x_2^\mu)$ seguido de la integración sobre el valor del campo en cada punto discreto i.e.

$$\int \mathcal{D}\psi e^{iS[\psi]} := \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\psi_j e^{iS[\psi_j]}, \quad \text{donde} \quad \psi_j := \psi(x_j^\mu) \quad (1.53)$$

1.3.1 Variación con respecto al campo ψ

Consideremos la acción de Klein–Gordon en espacio de Minkowski:

$$S[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right]. \quad (1.54)$$

Sea una variación infinitesimal del campo:

$$\boxed{\psi(x) \rightarrow \psi(x) + \delta\psi(x)}. \quad (1.55)$$

La variación de la acción¹⁸ es entonces:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu (\delta\psi) \right]. \quad (1.63)$$

¹⁸

Definición 1.3.1. *Sea $S[\phi(x)]$ un funcional que asigna un número (real o complejo) a cada configuración del campo $\phi(x)$. En teoría de campos, la acción es un ejemplo típico de funcional:*

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)),$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana.

La derivada funcional se puede definir como un límite análogo a la derivada ordinaria:

$$\frac{\delta S[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\phi(x) + \varepsilon \delta(x - y)] - S[\phi(x)]}{\varepsilon}, \quad (1.56)$$

donde $\delta(x - y)$ es la delta de Dirac localizada en y .

Las propiedades fundamentales de la derivada funcional son análogas a las de la derivada ordinaria:

1. Linealidad:

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} [a S_1[\phi] + b S_2[\phi]] = a \frac{\delta S_1[\phi]}{\delta \phi(y)} + b \frac{\delta S_2[\phi]}{\delta \phi(y)}, \quad (1.57)$$

donde a, b son constantes.

2. Regla de la cadena (funcional): Si $S[\phi] = F(G[\phi])$, entonces

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \int d^4x \frac{\delta F[G]}{\delta G(x)} \frac{\delta G(x)}{\delta \phi(y)}. \quad (1.58)$$

3. Derivada funcional de un campo:

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y). \quad (1.59)$$

4. Ejemplo con un funcional lineal:

$$S[\phi] = \int d^4x \phi(x) J(x) \Rightarrow \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = J(y). \quad (1.60)$$

5. Ejemplo con un término cuadrático:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)^2 \Rightarrow \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \phi(y). \quad (1.61)$$

Para el lagrangiano de Klein–Gordon tenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m^2 \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi. \quad (1.64)$$

Por lo tanto:

$$\delta S = \int d^4x \left[-m^2 \psi \delta \psi + (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) \partial_\mu (\delta \psi) \right]. \quad (1.65)$$

Aplicando integración por partes al segundo término y descartando los términos de frontera ($\delta \psi|_{\partial M} = 0$) obtenemos:

$$\int d^4x (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) \partial_\mu (\delta \psi) = - \int d^4x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi) \delta \psi. \quad (1.66)$$

combinando los términos tenemos:

$$\delta S = \int d^4x \left[-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi - m^2 \psi \right] \delta \psi = 0 \quad (1.67)$$

Dado que $\delta \psi$ es arbitrario, obtenemos la ecuación de Euler–Lagrange:

$$(\square + m^2) \psi = 0. \quad (1.68)$$

que representa la Ecuación de Klein–Gordon en coordenadas inerciales de Minkowski.¹⁹

6. Integración por partes funcional: Para un funcional que depende de derivadas del campo,

$$S[\phi] = \int d^4x F(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)),$$

se cumple que

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \frac{\partial F}{\partial \phi(y)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_\mu \phi(y))} \right), \quad (1.62)$$

donde los términos de frontera se anulan suponiendo que $\delta \phi(x)$ se desvanece en el borde del dominio de integración. Esta propiedad es la base de las ecuaciones de Euler–Lagrange en teoría de campos.

¹⁹

Definición 1.3.2 (Coordenadas inerciales de Minkowski). *Se llaman **coordenadas inerciales de Minkowski** a un sistema de coordenadas (t, x, y, z) en el espacio-tiempo plano tal que la métrica se expresa como*

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (1.69)$$

y en el cual las partículas libres se mueven con velocidad constante, es decir, siguen geodésicas rectas. En estas coordenadas, la derivada covariante ∇_μ se reduce a la derivada parcial ∂_μ , y la estructura de causalidad está determinada por los conos de luz definidos por $\eta_{\mu\nu}$.

1.3.2 Variación con respecto a la métrica $\eta_{\mu\nu}$

Supongamos que realizamos una variación infinitesimal de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} + \delta\eta^{\mu\nu}. \quad (1.70)$$

La variación de la acción correspondiente es

$$\delta S = \int d^4x \frac{1}{2} \delta\eta^{\mu\nu} \partial_\mu\psi \partial_\nu\psi = 0 \quad (1.71)$$

Para un campo ψ en espacio de Minkowski con lagrangiano $\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$, el *tensor energía-momento canónico*²⁰ se define como

$$T^\mu{}_\nu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \partial_\nu\psi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (1.74)$$

Este tensor es conservativo ($\partial^\mu T_{\mu\nu}^{\text{can}} = 0$) y representa la densidad de energía, momento y flujo de energía del campo.

Ejemplo: Para el campo de Klein–Gordon con acción

$$S[\psi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\psi \partial_\nu\psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right], \quad (1.75)$$

el tensor canónico es

$$T_{\mu\nu}^{\text{can}} = \partial_\mu\psi \partial_\nu\psi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha\psi \partial_\beta\psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right). \quad (1.76)$$

Simplificando los factores de $\frac{1}{2}$, obtenemos la forma simétrica usual en el espacio de Minkowski:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi \partial_\nu\psi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha\psi \partial_\beta\psi - m^2 \psi^2). \quad (1.77)$$

La teoría de Klein–Gordon *no es* una TQFT (Teoría de Campos Topológica), ya que la variación de la acción respecto a la métrica no es trivial. i.e. $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$ En una TQFT, la acción y los observables son independientes de la geometría del espacio–tiempo, es decir, $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$, mostrando que la dinámica depende explícitamente de la métrica.

²⁰Si consideramos la acción del Klein–Gordon como un funcional del métrico general $g_{\mu\nu}$, se puede definir el **tensor de Hilbert** mediante la variación de la acción respecto al métrico:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Hilbert}} := -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S[\psi, g]}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.72)$$

donde

$$S[\psi, g] = \int_M d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu\psi \nabla_\nu\psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right], \quad (1.73)$$

y

- $\sqrt{|g|}$ asegura la *invariancia del elemento de volumen* bajo cambios de coordenadas.
- $g^{\mu\nu}$ reemplaza a la métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$.
- ∇_μ es la derivada covariante asociada a $g_{\mu\nu}$, que en espacio plano se reduce a ∂_μ .

En espacio plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, esta definición coincide con el tensor canónico simétrico mostrado.

3. Motivación hacia TQFT

El campo de Klein–Gordon sirve como ejemplo de *QFT axiomatizable* sobre un espacio-tiempo M :

- Tenemos un espacio de estados \mathcal{H} i.e el *Espacio de Fock del Sistema*²¹ y operadores $\psi(x)$.
- Tenemos un funcional $Z[M]$ que codifica correlaciones.

Esto motiva la idea de una teoría más abstracta: *asignar a variedades espacios vectoriales y a cobordismos operadores lineales*, como se hace en una TQFT.

Remark 3. *Sin embargo, la teoría de Klein–Gordon NO es topológica*

- **Depende explícitamente de la métrica $g_{\mu\nu}$:** las correlaciones cambian si deformamos la métrica.
- El tensor energía-momento $T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}(\partial\psi)^2 - \frac{1}{2}m^2\psi^2)$ no es trivial.
- El espacio de estados es infinito-dimensional, mientras que en una TQFT unitarias los espacios de estados son finito-dimensionales.

Por estas razones, el campo de Klein–Gordon es una QFT local ordinaria²² y no una TQFT.

²¹

Definición 1.3.3 (Espacio de Fock). *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. El espacio de Fock asociado a \mathcal{H} se define como*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})_S \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})_S \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathcal{H}^{\otimes n})_S, \quad (1.78)$$

donde $(\mathcal{H}^{\otimes n})_S$ denota el subespacio de tensores simétricos (para bosones) o antisimétricos (para fermiones) de n copias de \mathcal{H} .

²²

Definición 1.3.4 (Teoría Cuántica de Campos Ordinaria). *Una teoría cuántica de campos (QFT) ordinaria en un espacio-tiempo M es una asignación de:*

- un espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados,
- operadores de campos $\psi(x)$ definidos sobre \mathcal{H} para cada punto $x \in M$,
- un lagrangiano o acción $S[\psi]$ que determina la dinámica de los campos.

No se requiere que la teoría cumpla propiedades topológicas especiales.

Definición 1.3.5 (QFT Local). *Una teoría cuántica de campos local es una QFT ordinaria que, además, cumple la localidad:*

$$[\psi(x), \psi(y)]_{\pm} = 0, \quad \text{si } x \text{ y } y \text{ están separados espacialmente,} \quad (1.79)$$

donde $[\cdot, \cdot]_{\pm}$ es el comutador (para bosones) o anticomutador (para fermiones). Esta condición asegura que no hay interacción instantánea a distancia.

1.3.3 Variación de la variedad subyacente δM

En teoría de campos, la acción $S[\psi, g]$ suele depender de:

- El campo ψ , que se encuentra definido sobre un variedad M .
- La métrica $g_{\mu\nu}$, que define la geometría de M .

Además de variar ψ (ecuaciones de Euler–Lagrange) o $g_{\mu\nu}$ (tensor energía–momento), se puede plantear la idea de una **variación de la variedad subyacente**.

Interpretaciones posibles

1. **Deformaciones de la estructura diferenciable:** Considerar una familia de variedades M_λ con aplicaciones suaves $f_\lambda : M \rightarrow M_\lambda$. Una variación infinitesimal se define como

$$\frac{d}{d\lambda} f_\lambda \Big|_{\lambda=0} \quad (1.80)$$

. Esta interpretación es formal y depende de la existencia de deformaciones diferenciables.

2. **Difeomorfismos infinitesimales:** Un difeomorfismo infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (1.81)$$

induce transformaciones en los campos y en la métrica:

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) - \xi^\mu \partial_\mu \psi(x), \quad (1.82)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (1.83)$$

En relatividad general, estas transformaciones se consideran *gauge* y no cambian la física.

Variación infinitesimal de un campo escalar

Consideremos un cambio infinitesimal de un punto:

$$x'^\mu := x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.84)$$

donde δx^μ es pequeño²³.

Sea un campo ϕ definido sobre una variedad M . Para una transformación del punto

$$x \rightarrow x' = x + \delta x,$$

definimos el campo transformado en el nuevo punto como

$$\boxed{\phi'(x') := \phi(x(x'))}. \quad (1.85)$$

²³Usualmente se define $\xi^\mu(x) := \delta x^\mu = \epsilon V^\mu(x)$, con $\epsilon \ll 1$ y $V^\mu(x)$ un campo vectorial.

Definición de variación infinitesimal. Sea un campo ϕ definido sobre una variedad M . Su variación $\delta\phi$ se define como

$$\boxed{\delta\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x)}, \quad (1.86)$$

donde $\phi'(x)$ es el campo transformado evaluado en el mismo punto x .

Si consideramos un desplazamiento de puntos $x \rightarrow x' = x + \delta x$, la variación extrínseca del campo se puede expresar como

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \approx -\delta x^\mu \partial_\mu \phi(x),$$

para un desplazamiento infinitesimal δx^μ .

Cálculo de la variación

Usando la expansión de Taylor de ϕ a primer orden alrededor del punto x' :

$$\phi'(x') = \phi(x(x')) = \phi(x' - \delta x(x')) \approx \phi(x') - \delta x^\mu(x') \frac{\partial \phi(x')}{\partial x^\mu}. \quad (1.87)$$

es decir:

$$\phi'(x') = \phi(x') - \delta x^\mu(x') \frac{\partial \phi(x')}{\partial x^\mu} \quad (1.88)$$

Evaluando en el punto $x' = x$ ²⁴:

$$\phi'(x) = \phi(x) - \delta x^\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}, \quad (1.89)$$

de donde se obtiene la variación infinitesimal:

$$\boxed{\delta\phi(x) = -\delta x^\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}}. \quad (1.90)$$

Ejemplo: campo escalar $\phi(x) = x^2$

Consideremos

$$\phi(x) = x^2 \quad (1.91)$$

y un cambio infinitesimal

$$x' = x + 0.00001 \quad (1.92)$$

Por definición:

$$\phi'(x') = \phi(x(x')) = (x' - 0.00001)^2 = x'^2 - 2x'(0.00001) + (0.00001)^2 \approx x'^2 - 2(0.00001)x' \quad (1.93)$$

²⁴La ecuación anterior se encuentra evaluada en el punto x' considerando x' como *metavariable* podemos sustituir la expresión anterior por $x' = x$

Expresando en x :

$$\phi'(x) \approx x^2 - 2(0.00001)x, \quad (1.94)$$

por lo que la variación es

$$\delta\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x) = -2(0.00001)x \quad (1.95)$$

$$\delta\phi(x) = -2(0.00001)x \quad (1.96)$$

□

3. **Variación del encaje:** Si el variedad M está encajada en un espacio de mayor dimensión $X : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, se pueden considerar variaciones de la forma $X \rightarrow X + \delta X$. Este enfoque aparece en teoría de cuerdas donde la acción depende de la geometría de la superficie en el espacio ambiente.

Discusión física

- En relatividad general, variar el variedad se traduce en variar la métrica o considerar difeomorfismos; los puntos del variedad no tienen significado físico absoluto.
- En teoría de campos sobre un fondo fijo (por ejemplo, Klein–Gordon en Minkowski), la variedad se considera *fija* y su variación es principalmente un concepto formal.
- En teorías topológicas, la acción puede depender únicamente de la topología de M , y una “variación de la variedad” podría interpretarse como un cambio de clase topológica.

Intuición

Se puede imaginar la variación del variedad como un “*estiramiento o deformación*” del espacio sobre el que viven los campos, sin modificar necesariamente el contenido físico local, pero afectando estructuras globales o topológicas.

Ejemplo 3 (Deformación de la estructura diferenciable de la esfera \mathbb{S}^3). *Considere la familia de difeomorfismos por dilatación*

$$f_\lambda : S^3 \longrightarrow M_\lambda, \quad f_\lambda(p) = (1 + \lambda) p, \quad (1.97)$$

donde $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ es la esfera unidad y

$$M_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1 + \lambda\}. \quad (1.98)$$

Sea ψ un campo escalar sobre S^3 . Definimos el campo transportado a M_λ por

$$\psi_\lambda = \psi \circ f_\lambda^{-1} \quad (\text{campo sobre } M_\lambda). \quad (1.99)$$

La métrica inducida en M_λ viene dada, al identificar mediante f_λ , por

$$g_\lambda = (1 + \lambda)^2 g_0, \quad (1.100)$$

donde g_0 es la métrica estándar en S^3 . (En dimensión $n = 3$ el elemento de volumen escala como $d\text{vol}_{g_\lambda} = (1 + \lambda)^3 d\text{vol}_{g_0}$.)

Sea la acción del campo escalar dada por

$$S[g, \psi] = \int_{S^3} \mathcal{L}(g, \psi, \nabla\psi) d\text{vol}_g = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi + V(\psi) \right) d\text{vol}_g. \quad (1.101)$$

donde $V(\psi)$ representa un potencial.²⁵ La acción sobre M_λ (con la misma forma funcional) es

$$S[g_\lambda, \psi_\lambda] := \int_{M_\lambda} \left(\frac{1}{2} g_\lambda^{\mu\nu} \nabla_\mu^{g_\lambda} \psi_\lambda \nabla_\nu^{g_\lambda} \psi_\lambda + V(\psi_\lambda) \right) d\text{vol}_{g_\lambda} \quad (1.103)$$

Haciendo el pull-back mediante f_λ y expresando la integral sobre la esfera base S^3 (identificando $f_\lambda^* g_\lambda = (1 + \lambda)^2 g_0$ y $\psi_\lambda \circ f_\lambda = \psi$), obtenemos

$$S_\lambda = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2} (1 + \lambda)^{-2} |\nabla\psi|^2 + V(\psi) \right) (1 + \lambda)^3 d\text{vol}_{g_0}, \quad (1.104)$$

de donde, simplificando,

$$S_\lambda[g_{\lambda,\mu\nu}, \psi_\lambda] = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2} (1 + \lambda) |\nabla\psi|^2 + (1 + \lambda)^3 V(\psi) \right) d\text{vol}_{g_0}. \quad (1.105)$$

Observaciones.

- El término cinético escala con un factor $(1 + \lambda)$.
- El potencial escala con un factor $(1 + \lambda)^3$.
- Si además se escala el campo ψ con algún peso apropiado (para conservar invariancia conforme), los factores de escala en los términos cinético y de potencial pueden cambiar. Aquí se ha supuesto ψ sin reescalado.

Variación infinitesimal. Derivando respecto a λ en $\lambda = 0$ obtenemos

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + 3V(\psi) \right) d\text{vol}_{g_0}. \quad (1.106)$$

²⁵ 25

Definición 1.3.6 (Potencial de un campo en QFT). Sea ψ un campo en teoría cuántica de campos (QFT) con lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}(\psi, \nabla\psi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - V(\psi). \quad (1.102)$$

El término $V(\psi)$ se llama **potencial del campo** y corresponde a la parte no cinética del lagrangiano. Es una función (generalmente polinómica) de ψ que determina la dinámica del campo sin derivadas, incluyendo la estructura de vacíos y las interacciones del campo consigo mismo o con otros campos.

Ejemplos típicos:

- Campo libre masivo: $V(\psi) = \frac{1}{2} m^2 \psi^2$.
- Campo con auto-interacción cuártica: $(\lambda \psi^4) V(\psi) = \frac{1}{2} m^2 \psi^2 + \frac{\lambda}{4!} \psi^4$.
- Potencial de Higgs: $V(\psi) = -\mu^2 \psi^\dagger \psi + \lambda (\psi^\dagger \psi)^2$.

Variación infinitesimal usando δg_λ . La variación de la acción S_λ respecto a la familia de métricas g_λ viene dada por

$$\delta S_\lambda = -\frac{1}{2} \int_{M_\lambda} T_\lambda^{\mu\nu} \delta g_{\lambda,\mu\nu} d\text{vol}_{g_\lambda}, \quad (1.107)$$

donde

$$g_\lambda = (1 + \lambda)^2 g_0 \quad (1.108)$$

tomando λ infinitesimal²⁶ i.e. $\lambda^2 = 0$ tenemos

$$\delta g_{\lambda,\mu\nu} := \frac{dg_{\lambda,\mu\nu}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 2 g_0{}_{\mu\nu}. \quad (1.109)$$

Sustituyendo $\delta g_{\lambda,\mu\nu}$ y evaluando en $\lambda = 0$ on-shell (es decir, usando ψ_λ solución de las ecuaciones de movimiento), obtenemos

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = - \int_{S^3} T^{\mu\nu} g_0{}_{\mu\nu} d\text{vol}_{g_0} = - \int_{S^3} T^\mu{}_\mu d\text{vol}_{g_0}. \quad (1.110)$$

Comparando con el cálculo directo:

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + 3V(\psi) \right) d\text{vol}_{g_0}, \quad (1.111)$$

obtenemos la identidad

$$T^\mu{}_\mu = -\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - 3V(\psi). \quad (1.112)$$

Aquí $T^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento definido sobre S^3 , adoptando la convención de Hilbert $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$. La variación $\delta g_{\lambda,\mu\nu}$ refleja la dependencia explícita de la métrica bajo la dilatación conforme.

Conclusión. Al variar la esfera S^3 mediante la familia de métricas conformalmente escaladas

$$g_\lambda = (1 + \lambda)^2 g_0, \quad (1.113)$$

observamos lo siguiente:

- La variación de la métrica bajo dilataciones es $\delta g_{\mu\nu} = 2 g_0{}_{\mu\nu}$, lo que refleja cómo la geometría se modifica al “inflar” la esfera.
- La acción del campo ψ cambia bajo esta dilatación, y el cambio está codificado en la traza del tensor energía-momento:

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_{S^3} T^\mu{}_\mu d\text{vol}_{g_0}, \quad (1.114)$$

con

$$T^\mu{}_\mu = -\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - 3V(\psi). \quad (1.115)$$

²⁶En principio λ es un parámetro continuo que define una familia de acciones S_λ . La variación de g_λ se obtiene derivando respecto a λ y evaluando en $\lambda = 0$, lo cual equivale a considerar el caso λ infinitesimal en la vecindad de cero.

- En general, la traza no es cero, por lo que la acción varía al modificar el radio de la esfera. Esto muestra explícitamente cómo la geometría del espacio influye en la dinámica del campo.
- En casos especiales por ejemplo, para un potencial que preserve invariancia conforme clásica, la traza podría desaparecer y la acción sería invariante bajo dilataciones, reflejando simetría conforme clásica.

De esta manera, la variación de la esfera permite conectar la geometría del espacio con las propiedades del tensor energía-momento y la respuesta de la acción del campo a cambios conformes del espacio.

□

Ejercicio 1.3.1 (Variación del funcional pullbackeado). *Sea la familia de acciones pullbackeadas sobre la esfera S^3 :*

$$S_\lambda[g_0, \psi] = \int_{S^3} \left(\frac{1}{2}(1 + \lambda)|\nabla\psi|^2 + (1 + \lambda)^3 V(\psi) \right) d\text{vol}_{g_0}, \quad |\nabla\psi|^2 := g_0^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi.$$

1. Considerando una variación de la métrica $g_0 \mapsto g_0 + \delta g_0$, calcular explícitamente δS_λ y escribirla en la forma

$$\delta S_\lambda = -\frac{1}{2} \int_{S^3} T_\lambda^{\mu\nu} \delta g_{0\mu\nu} d\text{vol}_{g_0}.$$

2. Determinar el tensor energía-momento $T_\lambda^{\mu\nu}$ asociado al funcional S_λ i.e.

3. Calcular la traza $T_\mu^\mu(\lambda)$ y comprobar que al evaluar en $\lambda = 0$ se recupera

$$T_\mu^\mu(0) = -\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - 3V(\psi),$$

coincidiendo con el resultado obtenido previamente al derivar la acción respecto a λ de manera directa.

Nota: Este ejercicio conecta la variación del funcional pullbackeado respecto de la métrica fija g_0 con la variación con respecto de la métrica g_λ y la traza del tensor energía-momento.

1.4 Regiones acausalmente desconectadas en Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT)

En *Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT)*, el enfoque no se basa directamente en campos definidos en cada punto del espacio-tiempo, sino en *observables asociados a regiones del espacio-tiempo*. La estructura fundamental es un *net de álgebras locales*:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}), \quad (1.116)$$

donde $\mathcal{O} \subset M$ es una región abierta del espacio de Minkowski y $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es la álgebra de observables que se pueden medir en \mathcal{O} .

1.4.1 Motivación del uso de regiones acausales

Para cumplir el *principio de causalidad*, dos regiones acausalmente desconectadas $O_1 \perp O_2$ deben tener observables que comutan:

$$[A_1, A_2] = 0, \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}(O_1), A_2 \in \mathcal{A}(O_2). \quad (1.117)$$

Esto asegura que medir un observable en O_1 no afecta ningún observable en O_2 , coherente con la relatividad especial.

1.4.2 Net de álgebras locales

El formalismo algebraico se basa en una red (net) de álgebras $\{\mathcal{A}(O)\}_{O \subset M}$ que satisface los siguientes axiomas básicos (Haag–Kastler).

Definición 1.4.1 (Net de álgebras de observables). *Sea (M, g) un espaciotiempo lorentziano. Una net (o red) de álgebras de observables es una asignación que a cada región abierta acotada $O \subset M$ le asocia una C^* -álgebra $\mathcal{A}(O)$ de operadores, de manera que se cumplen los siguientes axiomas (Haag–Kastler):*

1. **Isotonía:** Si $O_1 \subset O_2$, entonces

$$\mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2). \quad (1.118)$$

2. **Covariancia:** Existe una representación del grupo de simetrías del espaciotiempo (por ejemplo, el grupo de Poincaré en el caso de $M = \mathbb{M}^{1,3}$) en automorfismos de la red:

$$U(g) \mathcal{A}(O) U(g)^{-1} = \mathcal{A}(gO), \quad g \in \text{Iso}(M, g). \quad (1.119)$$

3. **Localidad (o microcausalidad):** Si O_1 y O_2 son regiones acausalmente desconectadas, entonces los observables asociados con ellas comutan:

$$[A, B] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}(O_1), B \in \mathcal{A}(O_2). \quad (1.120)$$

4. **Normalización:** Existe una C^* -álgebra global de observables

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{O \subset M} \mathcal{A}(O)}^{\|\cdot\|}, \quad (1.121)$$

generada por todas las subálgebras locales.

Los observables en regiones acausales se pueden medir simultáneamente de manera consistente. En AQFT, esto reemplaza la idea tradicional de “valores de campos en cada punto” por una estructura algebraica que respeta la causalidad. Por ello, los sets acausales son la piedra angular de la construcción de AQFT, garantizando que la teoría sea consistente con la relatividad especial.

1.4.3 De Regreso al campo de Klein-Gordon ψ

En la sección anterior definimos el net de álgebras locales satisfaciendo los axiomas de Haag-Kastler. En esta parte usaremos nuevamente el campo de Klein-Gordon como motivación para dichos axiomas.

Consideremos el lagrangiano del campo de Klein–Gordon en espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas inerciales:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - |\nabla \phi|^2 - m^2 \phi^2]. \quad (1.122)$$

En el formalismo hamiltoniano²⁷ definimos el momento canónico conjugado como la derivada funcional del lagrangiano respecto a la velocidad del campo:

$$\pi(t, \vec{x}) := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi(t, \vec{x}))}. \quad (1.125)$$

Para el lagrangiano de Klein–Gordon esto nos da

$$\pi(t, \vec{x}) = \partial_t \phi(t, \vec{x}), \quad (1.126)$$

mostrando que el momento conjugado depende funcionalmente de la historia del campo a través de su derivada temporal.

La densidad hamiltoniana se define mediante la transformada de Legendre²⁸ funcional:

$$\mathcal{H}[\phi, \pi] = \int d^3x \pi(t, \vec{x}) \partial_t \phi(t, \vec{x}) - \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]. \quad (1.128)$$

²⁷El formalismo hamiltoniano de campos es una extensión del formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica a sistemas con infinitos grados de libertad, como los campos. En este formalismo, se introduce el *momento canónico conjugado* $\pi(\vec{x}, t)$ asociado a cada campo $\phi(\vec{x}, t)$ mediante derivadas funcionales del lagrangiano respecto a la derivada temporal del campo. La dinámica del sistema se describe entonces en términos del Hamiltoniano

$$H[\phi, \pi] = \int d^3x \mathcal{H}[\phi, \pi], \quad (1.123)$$

donde \mathcal{H} es la densidad hamiltoniana. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de las *ecuaciones de Hamilton* funcionales:

$$\partial_t \phi(t, \vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi(t, \vec{x})}, \quad \partial_t \pi(t, \vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(t, \vec{x})}, \quad (1.124)$$

de forma análoga a la mecánica clásica, mostrando cómo evoluciona el campo y su momento conjugado en el tiempo.

²⁸Dada una función suave $f(x)$, su transformada de Legendre $g(p)$ se define a partir de la condición diferencial

$$p = \frac{df}{dx} \quad (1.127)$$

de modo que $g(p) = p x - f(x)$ con x expresado implícitamente en términos de p mediante $p = \frac{df}{dx}$.

Sustituyendo $\pi = \partial_t \phi$ y el lagrangiano, se obtiene

$$\mathcal{H}[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (1.129)$$

Finalmente, el Hamiltoniano total del sistema se expresa como

$$H[\phi, \pi] = \int d^3x \mathcal{H}[\phi, \pi] = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]. \quad (1.130)$$

De esta forma, el Hamiltoniano representa la energía total del campo, donde cada término refleja una contribución distinta: la energía cinética temporal, la energía espacial y la energía de masa, con la dependencia funcional explícita del campo y su momento conjugado.

Al *cuantizar canónicamente*²⁹ el campo de Klein–Gordon, promovemos el campo clásico $\phi(\vec{x}, t)$ y su momento conjugado $\pi(\vec{x}, t)$ a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert del sistema. Estos operadores satisfacen las siguientes *relaciones de conmutación canónicas*:

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.133)$$

La primera relación indica que los operadores de campo en distintos puntos del espacio comutan entre sí, reflejando que no existen restricciones directas entre los valores del campo en lugares distintos al mismo tiempo. De manera análoga, los momentos conjugados en distintos puntos también comutan. La tercera relación, conocida como la *relación canónica fundamental*, codifica la dependencia funcional entre el campo y su momento conjugado en el mismo punto, y es la que garantiza que la cuantización respete la estructura hamiltoniana del sistema. La delta de Dirac tridimensional³⁰ $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ asegura que la conmutación es local, es decir, sólo ocurre cuando los puntos espaciales coinciden.

²⁹La cuantización canónica consiste en pasar de un sistema clásico, descrito por un lagrangiano o un Hamiltoniano y sus corchetes de Poisson, a un sistema cuántico, en el que los observables se representan por operadores sobre un espacio de Hilbert. De manera general, si $f[\phi, \pi]$ y $g[\phi, \pi]$ son funciones funcionales de los campos $\phi(t, \vec{x})$ y sus momentos conjugados $\pi(t, \vec{x})$, la cuantización canónica se define mediante la regla

$$\{f, g\}_{\text{Poisson}} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (1.131)$$

donde $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ es el conmutador de operadores. Esta correspondencia asegura que las relaciones algebraicas del sistema clásico se respetan en la versión cuántica. En particular, para los campos y sus momentos conjugados se obtiene la relación canónica fundamental

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.132)$$

y los demás conmutadores entre campos o entre momentos en distintos puntos espaciales se anulan. Este procedimiento es la base para construir la teoría cuántica de campos, permitiendo la descripción de fenómenos como la creación y destrucción de partículas.

³⁰La delta de Dirac tridimensional $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ es una función distribución definida por:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k, \quad (1.134)$$

que cumple la propiedad

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}) \quad (1.135)$$

para cualquier función test $f(\vec{x})$ suficientemente suave. En el contexto de la cuantización de campos, asegura que las relaciones de conmutación canónica son locales: el campo $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t, \vec{y})$ sólo comutan de manera no trivial cuando los puntos espaciales coinciden, es decir, $\vec{x} = \vec{y}$. Esto refleja que las interacciones inmediatas sólo ocurren en el mismo punto del espacio.

1.4.4 Conmutador del campo de Klein-Gordon en dos puntos

Sea $\phi(x)$ un campo escalar libre de masa m de Klein-Gordon. Definimos el conmutador en dos puntos $x, y \in M$ como

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \equiv \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x). \quad (1.136)$$

1. Expansión en modos del campo

El campo $\hat{\phi}(x)$ puede escribirse mediante los operadores de creación y destrucción de energía³¹ como:

$$\boxed{\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right),} \quad (1.138)$$

donde $k \cdot x = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, y los operadores de creación y aniquilación satisfacen

$$\boxed{[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \quad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = 0.} \quad (1.139)$$

2. Cálculo del conmutador

De esta forma utilizando las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \\ &= \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left(\hat{a}_{\vec{q}} e^{-ik \cdot y} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{iq \cdot y} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x}, \hat{a}_{\vec{q}} e^{-ik \cdot y} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{iq \cdot y} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left\{ [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] e^{-ik \cdot x} e^{iq \cdot y} + [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}] e^{ik \cdot x} e^{-iq \cdot y} \right\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q})] e^{-ik \cdot x} e^{iq \cdot y} - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q})] e^{ik \cdot x} e^{-iq \cdot y} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[\frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left((2\pi)^3 e^{-ikx} e^{iky} - (2\pi)^3 e^{ikx} e^{-iky} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \end{aligned} \quad (1.140)$$

³¹La descomposición del campo escalar $\phi(x)$ en términos de operadores de creación y aniquilación se basa en la expansión en modos de Fourier, aprovechando que el campo libre satisface la ecuación de Klein-Gordon. Cualquier solución $\phi(x)$ puede expresarse como superposición de ondas planas

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (1.137)$$

Aquí, $a_{\vec{k}}$ y $a_{\vec{k}}^\dagger$ son operadores que eliminan o crean una excitación con momento \vec{k} y energía $\omega_{\vec{k}}$. Esta construcción garantiza que cada modo de onda se comporte como un *oscilador armónico cuántico independiente*, de manera que el campo completo se puede interpretar como un conjunto de osciladores armónicos cuánticos, donde las excitaciones corresponden a partículas de masa m .

obtenemos que los únicos términos no nulos son los cruzados $a_{\vec{k}}$ y $a_{\vec{q}}^\dagger$. Así,

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right). \quad (1.141)$$

3. Anulación del conmutador en separación acausal

Consideremos un campo escalar cuántico $\hat{\phi}(x)$ en el espaciotiempo de Minkowski. Las relaciones de conmutación canónicas a igual tiempo son

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.142)$$

donde $\hat{\pi}(t, \vec{x})$ es el momento conjugado de $\hat{\phi}(t, \vec{x})$.

Separación espaciotemporal acausal

Dos puntos del espaciotiempo $x = (t, \vec{x})$ y $x' = (t', \vec{x}')$ se dicen *acausalmente separados* (espacialmente) si

$$(x - x')^2 = (t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2 < 0. \quad (1.143)$$

Físicamente, esto significa que ninguna señal puede propagarse de un evento al otro sin superar la velocidad de la luz; por lo tanto, no pueden influenciarse causalmente.

Existencia de un sistema de referencia de simultaneidad

Para una separación acausal siempre es posible encontrar un sistema inercial en el que ambos eventos ocurran simultáneamente:

$$t_{\text{nuevo}} = t'_{\text{nuevo}}. \quad (1.144)$$

Esto se debe a que el intervalo es espaciado ($|\vec{x} - \vec{x}'| > |t - t'|$), y se puede realizar un *boost* de Lorentz³² a lo largo de la dirección $\vec{x} - \vec{x}'$ que “incline” los hiperplanos de simultaneidad, colocando ambos eventos en la misma hoja temporal.

Comutadores a igual tiempo

En este sistema de referencia, las relaciones de conmutación canónicas implican que

$$[\hat{\phi}(t_{\text{nuevo}}, \vec{x}_{\text{nuevo}}), \hat{\phi}(t_{\text{nuevo}}, \vec{y}_{\text{nuevo}})] = 0, \quad (1.146)$$

ya que los dos puntos están al mismo tiempo pero en distintas posiciones espaciales.

³²Un *boost* de Lorentz es una transformación lineal que mezcla las coordenadas de espacio y tiempo de manera que se conserva la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Por ejemplo, un boost a lo largo del eje x con velocidad v se escribe

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (1.145)$$

y deja invariante el intervalo de Minkowski $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. i.e. $(ds')^2 = ds$. En teoría cuántica de campos, los operadores de campo $\phi(x)$ transforman bajo boosts como $\phi'(x') = \phi(x)$, asegurando que los conmutadores de campos sean invariantes.

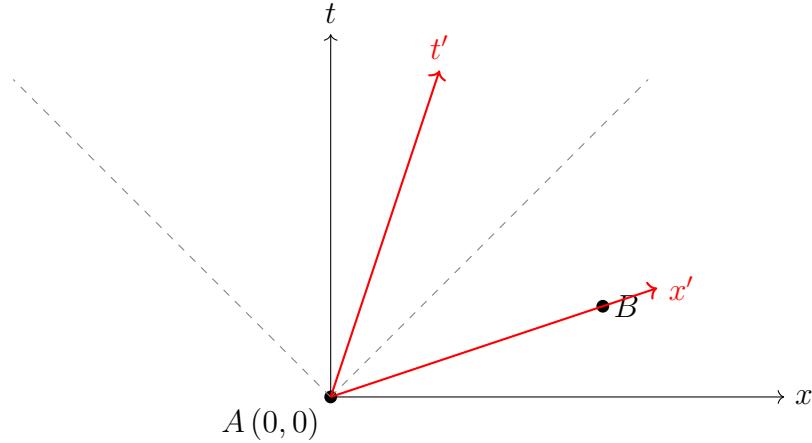


Figure 1.2: Los Eventos A y B son simultaneos en el sistema de refencia (t', x') .

Invariancia de Lorentz

El conmutador de campos escalares es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = [\hat{\phi}(\Lambda x), \hat{\phi}(\Lambda x')] \quad (1.147)$$

para cualquier transformación de Lorentz Λ . Por lo tanto, si el conmutador se anula en un sistema, se anula en todos los sistemas de referencia.

Proof. Sea un campo escalar cuántico $\hat{\phi}(x)$. Su conmutador se define como

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] := \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x). \quad (1.148)$$

Bajo una transformación de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda x$, un campo escalar se transforma como

$$\hat{\phi}(x) \longrightarrow \hat{\phi}'(x') = \hat{\phi}(\Lambda^{-1}x'). \quad (1.149)$$

Evaluemos el conmutador en los puntos transformados:

$$[\hat{\phi}'(x'), \hat{\phi}'(y')] = [\hat{\phi}(\Lambda^{-1}x'), \hat{\phi}(\Lambda^{-1}y')] \quad (1.150)$$

$$= [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \quad (\text{definiendo } x = \Lambda^{-1}x', y = \Lambda^{-1}y'). \quad (1.151)$$

Por lo tanto, se concluye que

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\phi}(\Lambda x), \hat{\phi}(\Lambda y)], \quad (1.152)$$

es decir, el conmutador de un campo escalar es **invariante bajo transformaciones de Lorentz**³³. \square

³³ Esta prueba depende crucialmente de que el campo ϕ sea escalar. Para campos con índices (vectores, tensores, espinores), aparecen factores de Λ que modifican la forma del conmutador:

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] \longrightarrow [A'^\mu(x'), A'^\nu(y')] = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu [A^\alpha(x), A^\beta(y)]. \quad (1.153)$$

Conclusión

Combinando estos resultados, concluimos que para puntos acausalmente separados, los operadores de campo siempre comutan:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = 0 \quad \text{si } (x - x')^2 < 0. \quad (1.154)$$

Esto garantiza el principio de causalidad en teoría cuántica de campos: los observables que no pueden influenciarse mutuamente deben comutar.

Es decir:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \begin{cases} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right), & \text{si } (x-y)^2 \geq 0 \text{ (causalmente conectados)} \\ 0, & \text{si } (x-y)^2 < 0 \text{ (acausales)} \end{cases} \quad (1.155)$$

□

En el ejemplo anterior, haciendo uso del campo de Klein-Gordon ψ , fue posible motivar la definición de una red de álgebras locales. Dos puntos del espacio-tiempo x, y que se encuentran causalmente conectados y dentro del dominio de definición del campo tienen comutador no trivial.

1.5 Espacio de Hilbert de Klein-Gordon

1.5.1 Hamiltoniano Renormalizado

En la sección anterior obtuvimos el hamiltoniano clásico de Klein-Gordon que viene dado por

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2(x) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right]. \quad (1.156)$$

donde el campo de Klein-Gordon expresado en términos de los operadores de creación y destrucción de energía esta dado por

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \quad (1.157)$$

al calcular el momento canónico conjugado $\pi := \partial_t \phi(t, x)$ obtenemos:

$$\pi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-i\omega_{\vec{k}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \quad (1.158)$$

y el gradiante $\nabla \phi(x)$ toma la forma

$$\nabla \phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-ik_i}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-ik \cdot x} \right) \quad (1.159)$$

donde $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ y $k \cdot x = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x}$.

Después de un largo pero sencillo cálculo usando las expresiones para $\pi^2(x)$, $|\vec{\nabla}(\phi(x))|^2$ y $\phi(x)^2$ y usando propiedades de la Delta de Dirac obtenemos que el hamiltoniano pude ser expresado en términos de los operadores de creación y destrucción de energía como:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right) \quad (1.160)$$

Ejercicio 1.5.1. Prueba la igualdad anterior.

Por otro lado usando la regla de conmutación que definen al operador de creación y destrucción de energía (1.138) i.e.

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] = \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} = (2\pi)^3 \delta^3(0), \quad (1.161)$$

despejando para $\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ y sustituyendo en (1.160) tenemos:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} (2\pi)^3 \delta(0) \quad (1.162)$$

donde

$$\delta^3(0) = \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3x}_{\text{Volumen } \mathbb{R}^3} \quad (1.163)$$

denotando $\text{Vol}(\mathbb{R}^3)$ a este volumen³⁴ tenemos

$$H = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \text{Vol}(\mathbb{R}^3) \quad (1.164)$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{R}^3) \right) \quad (1.165)$$

Esta ecuación nos recuerda la expresión para un oscilador armónico.³⁵ Consideremos $|E_0\rangle$ el

³⁴Al ser \mathbb{R}^3 no compacto tenemos que el volumen es infinito. Este problema en principio puede solucionarse tomando una región compacta sobre \mathbb{R}^3 .

³⁵Consideremos una partícula de masa m sujeta a un resorte ideal con constante elástica k . La energía potencial de este sistema viene dada por la ley de Hooke

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2, \quad (1.166)$$

y la frecuencia angular natural está definida como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.167)$$

De este modo, el Hamiltoniano clásico que describe el sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (1.168)$$

En mecánica cuántica, \hat{x} y \hat{p} pasan a ser operadores que satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}. \quad (1.169)$$

Para simplificar la expresión del Hamiltoniano se introducen los operadores de aniquilación y creación, definidos como

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad (1.170)$$

los cuales cumplen la relación de conmutación fundamental

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (1.171)$$

El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico puede escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (1.172)$$

A partir de las relaciones de conmutación se obtiene:

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = +\hbar\omega \hat{a}^\dagger. \quad (1.173)$$

Estas relaciones muestran que \hat{a} y \hat{a}^\dagger actúan como operadores de *descenso* y *ascenso* de energía, respectivamente. Los estados propios del oscilador armónico se construyen aplicando repetidamente el operador de creación \hat{a}^\dagger sobre el *estado fundamental o estado de vacío* $|0\rangle$, definido por

$$\hat{a}|0\rangle := 0. \quad (1.174)$$

donde el estado con n cuantos de excitación se obtiene como

$$|n\rangle := \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (1.175)$$

valor propio de energía más bajo del sistema H i.e.

$$H|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle \quad (1.181)$$

como $|E_0\rangle$ es el estado de menor energía tenemos que $\hat{a}_k|E_0\rangle = 0$. Así obtenemos

$$E_0 = \langle E_0 | H | E_0 \rangle = \langle E_0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{R}^3) \right) | E_0 \rangle = \quad (1.182)$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \underbrace{\langle E_0 | E_0 \rangle}_{=1} + \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{R}^3) \underbrace{\langle E_0 | E_0 \rangle}_{=1} \quad (1.183)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{R}^3) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \quad (1.184)$$

ya que los vectores $|E_0\rangle$ por hipótesis los tomamos normalizados. Es decir tenemos:

$$E_0 = \underbrace{\frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{R}^3)}_{\infty \text{ osciladores por cada punto del espacio}} \underbrace{\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}}}_{\infty \text{ osciladores cada uno con frecuencia } \omega_{\vec{k}}} \quad (1.185)$$

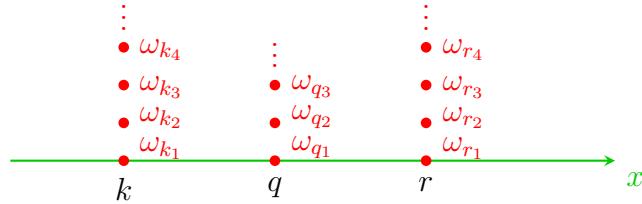


Figure 1.3: Representación en 1+1 de los infinitos osciladores para cada punto del espacio.

Dichos estados se encuentran normalizados. Esto nos permite obtener los valores propios del oscilador desplazando el sistema entre los autovalores de energía i.e.

$$E_n = \langle n | \hat{H} | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.176)$$

Los operadores de aniquilación y creación actúan sobre esta base de la siguiente forma:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.177)$$

El número de excitaciones está determinado por el *operador número*

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.178)$$

cuyos autovalores satisfacen

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.179)$$

De esta forma, la expresión del Hamiltoniano para N osciladores armónicos desacoplados es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.180)$$

Sustituyendo la expresión de E_0 en el hamiltoniano obtenemos

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + E_0 \quad (1.186)$$

El término E_0 representa la *energía de punto cero* del campo, la cual surge de la suma de las contribuciones $\omega_{\vec{k}}$ de todos los modos del vacío. Esta cantidad es infinita debido al número infinito de grados de libertad del campo y no tiene consecuencias observables directas, ya que las mediciones físicas dependen únicamente de *diferencias de energía*. En otras palabras, un desplazamiento *constante* en el valor absoluto del Hamiltoniano i.e. $H' = H + cI$ no afecta a la dinámica ni a los espectros relativos de excitación.

Por esta razón, es habitual redefinir el Hamiltoniano mediante el *orden normal (normal ordering)*, que consiste en reordenar los operadores de creación $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_{\vec{k}}$ de modo que todos los operadores de creación aparezcan a la izquierda. Este procedimiento elimina la contribución infinita del vacío, que si bien es infinita podemos considerarla constante fijando la energía del estado fundamental en $E_{\text{vacío}} = 0$ sin alterar los resultados físicos. Este vacío $|0\rangle$ recibe el nombre de *vacio de Klein-Gordon*. Así, el *Hamiltoniano renormalizado*³⁶ adopta la forma

$$: H : = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}, \quad (1.187)$$

donde los dos puntos indican precisamente el orden normal y se ha descartado el término constante E_0 .

1.5.2 Espacio de hilbert de N osciladores armónicos desacoplados

Hemos revisado que para el caso de N osciladores armónicos desacoplados tenemos que el hamiltoniano total del sistema viene dado por

$$H = \sum_{k=1}^n \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.188)$$

de esta forma el espacio de Hilbert asociado al sistema H viene dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert asociados a cada uno de los osciladores i.e.

$$\mathcal{H} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}^i \quad (1.189)$$

Si el número de osciladores tiende a infinito, i.e. $N \rightarrow \infty$ volvemos a tener el mismo problema presentado en la sección anterior para el hamiltoniano de Klein-Gordon. Análogo a la teoría de

³⁶Los problemas de infinitos en la teoría cuántica de campos surgen porque los campos se tratan como funciones definidas en cada punto del espacio-tiempo, lo que lleva a que las cantidades físicas involucren integrales sobre un número infinito de grados de libertad. En particular, al calcular valores esperados o correcciones cuánticas (por ejemplo, en diagramas de Feynman), aparecen integrales divergentes en el límite de altas energías o pequeñas distancias. Estas divergencias reflejan el hecho de que la teoría, tal como está formulada, no es válida a todas las escalas, y requieren un procedimiento de *renormalización* para obtener resultados finitos y físicamente significativos.

Klein-Gordon podemos despreciar el factor constante de nuestro hamiltoniano haciendo que el estado de energía más bajo del sistema sea el estado $|0\rangle$ i.e. el hamiltoniano adquiere la forma

$$H = \sum_{k=1}^n \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (1.190)$$

De esta forma si $|0_i\rangle$ es el estado de energía más bajo para i -ésimo oscilador tenemos que

$$|0\rangle := |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes \dots \otimes |0_n\rangle \quad (1.191)$$

es decir

$$H|0\rangle = 0|0\rangle \quad (1.192)$$

Consideremos $\{|n_i\rangle\}$ la base del i -ésimo oscilador armónico. De esta forma una base para el hamiltoniano H viene dada por

$$\{|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle\} \quad (1.193)$$

Definimos

$$|i_j\rangle := |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes \underbrace{|i\rangle}_{\substack{i\text{-ésimo} \\ \text{lugar}}} \otimes \dots \otimes |0\rangle \quad (1.194)$$

Análogamente definimos

$$|k_i r_s\rangle := |0\rangle \otimes \dots \otimes \underbrace{|k\rangle}_{\substack{i\text{-ésimo} \\ \text{lugar}}} \otimes \dots \otimes \underbrace{|r\rangle}_{\substack{s\text{-ésimo} \\ \text{lugar}}} \otimes \dots \otimes |0\rangle \quad (1.195)$$

De esta forma

$$H|k_i r_s\rangle = (k\omega_i + r\omega_s)|k_i r_s\rangle \quad (1.196)$$

...

1.6 Funciones de correlación en teoría cuántica de campos

En teoría cuántica de campos (QFT), las *funciones de correlación* o *funciones de Green* codifican las amplitudes para observar valores del campo en distintos puntos del espacio–tiempo. Para un campo escalar real $\phi(x)$, la función de correlación de n puntos se define como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \quad (1.197)$$

donde T es el operador de ordenación temporal³⁷.

1.6.1 Integral de camino y generador de correlaciones

Introducimos una fuente externa $J(x)$ y el funcional generador

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J(x)\phi(x)) \right\}, \quad (1.198)$$

con la densidad lagrangiana usual para el campo escalar $\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]$. Las funciones de correlación se obtienen por derivadas funcionales:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.199)$$

La identidad clave que explica esto es

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left(i \int d^4y J(y)\phi(y) \right) = i\phi(x) \exp \left(i \int d^4y J(y)\phi(y) \right), \quad (1.200)$$

es decir, derivar respecto de J “saca” factores de ϕ .

³⁷La *ordenación temporal* (denotada por el operador T) consiste en disponer los campos cuánticos según el orden decreciente de sus coordenadas temporales, es decir, el campo con tiempo mayor se coloca a la izquierda. Para dos puntos se puede escribir explícitamente como:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \Theta(x^0 - y^0) \phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y)\phi(x),$$

donde $\Theta(t)$ es la función escalón de Heaviside i.e.

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

con la convención habitual $\Theta(0) = \frac{1}{2}$ para garantizar simetría en el caso de tiempos iguales. Para un número arbitrario n de campos, el operador T ordena todos los factores de acuerdo a sus tiempos:

$$T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} = \sum_{\pi \in S_n} \Theta(x_{\pi(1)}^0 \geq x_{\pi(2)}^0 \geq \cdots \geq x_{\pi(n)}^0) \phi(x_{\pi(1)}) \cdots \phi(x_{\pi(n)}),$$

donde S_n es el grupo de permutaciones y la función $\Theta(\cdots)$ vale 1 si las desigualdades temporales se cumplen y 0 en caso contrario. En el caso de campos fermiónicos, cada permutación lleva además el signo $\text{sgn}(\pi)$ para respetar las estadísticas de Fermi. Esta prescripción garantiza que las amplitudes obtenidas en la integral de camino coincidan con las reglas de causalidad de la teoría cuántica de campos.

1.6.2 Ejemplo detallado: campo escalar libre (propagador)

Consideremos el caso libre (sin interacción),

$$\mathcal{L}_0[\phi] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (1.201)$$

La acción es

$$S_0[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi]. \quad (1.202)$$

Integrando por partes (y suponiendo que los campos y sus derivadas se anulan en el infinito, de modo que las contribuciones de frontera desaparecen), podemos escribir la parte cuadrática como

$$S_0[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) K \phi(x), \quad (1.203)$$

donde definimos el operador $K := -\square - m^2 + i\varepsilon$, y la pieza $i\varepsilon$ implementa la prescripción de Feynman. La integral de camino con fuente es

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} \int d^4x \phi K \phi + \int d^4x J \phi \right] \right\}. \quad (1.204)$$

Para evaluar la integral gaussiana completamos el cuadrado. Formalmente,

$$\frac{1}{2}\phi K \phi + J \phi = \frac{1}{2}(\phi + K^{-1}J) K (\phi + K^{-1}J) - \frac{1}{2}J K^{-1}J, \quad (1.205)$$

de donde (hasta una constante multiplicativa $Z_0[0]$) se obtiene

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right], \quad (1.206)$$

siendo $\Delta_F(x-y) = K^{-1}(x,y)$ el propagador de Feynman que satisface

$$K \Delta_F(x-y) = (-\square - m^2 + i\varepsilon) \Delta_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (1.207)$$

En representación de momentos,

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.208)$$

A partir de $Z_0[J]$ se obtiene la función de dos puntos libre:

$$G^{(2)}(x,y) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \bigg|_{J=0} = \Delta_F(x-y). \quad (1.209)$$

1.6.3 Interacciones: $\lambda\phi^4$ y el truco de las derivadas funcionales

Consideremos un campo escalar real con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

El funcional generador está dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi \right] \right\}.$$

Tratamos el acoplamiento λ como pequeño y realizamos una expansión en potencias de λ . Para una interacción local clásica $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$, el término de interacción en la acción es $S_{\text{int}}[\phi] = -\int d^4x \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$. En el funcional generador completo se tiene

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0[\phi] + iS_{\text{int}}[\phi] + i \int J\phi}. \quad (1.210)$$

Usando que $\phi(x)e^{i \int J\phi} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i \int J\phi}$, podemos reescribir formalmente

$$Z[J] = \exp \left[iS_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] Z_0[J], \quad (1.211)$$

es decir, reemplazando cada $\phi(x)$ por $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}$ obtenemos un operador que actúa sobre el generador del campo libre $Z_0[J]$. Al expandir el exponencial en series obtenemos la expansión perturbativa en potencias de λ y, término a término, los diagramas de Feynman.

Por ejemplo, la corrección de orden λ a la función de dos puntos proviene del término lineal en S_{int} :

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \left\{ \left[1 + iS_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) + \dots \right] Z_0[J] \right\} \Big|_{J=0} \quad (1.212)$$

$$= \Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} \int d^4z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(x_2 - z) \Delta_F(0) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (1.213)$$

El factor $\Delta_F(0)$ corresponde a una integral de lazo (tadpole) y es divergente en el continuo; requiere regularización y renormalización. En el espacio de momentos la misma corrección se interpreta como la autoenergía $\Sigma(p)$ que desplaza la posición del polo (corrección de masa).

1.6.4 Notas sobre regularización y renormalización

Las integrales de lazo como $\Delta_F(0)$ o $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$ son divergentes. En la práctica se introduce una regularización (p. ej. corte en momento, regularización dimensional, red Euclídea) y se reabsorben las divergencias en las constantes del lagrangiano (masa, acoplamiento, normalización de campo) mediante renormalización.

1.6.5 Comentarios finales

- La identidad que permite reemplazar ϕ por $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}$ se basa únicamente en la regla de la cadena y en la linealidad de la integral de camino.
- La definición funcional estricta se obtiene desde la discretización en red: en la red, la integral de camino es un integral finito y la derivada funcional es simplemente una derivada parcial respecto a la variable ϕ_i en cada sitio; el continuo se recupera al tomar el límite de malla nula.
- El formalismo mostrado es suficiente para derivar las reglas de Feynman y para la práctica de la teoría perturbativa; la rigurosidad matemática requiere cuidado adicional (medidas en espacios funcionales, teorías constructivas, etc.).

1.7 Axiomas Fundamentales de la Física

En la sección anterior se revisó cómo, a través del campo de Klein-Gordon ψ , es posible obtener condiciones sobre los conmutadores de los operadores cuánticos asociados. Esto nos lleva a observar algunos hechos fundamentales de cualquier teoría que se considere física.

1.7.1 Invarianza Ecuacional de la teoría sobre un espacio definido G

La teoría anterior, definida a través del espacio de Klein-Gordon, muestra que:

1.- Cualquier cantidad definida sobre el espacio subyacente M debe ser ecuacionalmente invariable bajo un grupo de estructura G íntimamente relacionado con el espacio M .

La invarianza depende de la teoría en la que se esté trabajando. En este punto, lo fundamental es que la cantidad debe ser un número real \mathbb{R} o complejo \mathbb{C} .

Esto pone de manifiesto que cualquier teoría física significativa debe contemplar el conjunto

$$C^\infty(M; \mathbb{K}) := \{ \phi : M \rightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ es infinitamente diferenciable} \}, \quad (1.214)$$

donde \mathbb{K} es un campo³⁸ correspondiente a los campos escalares definidos en la teoría.

Tipos de Campos y Transformaciones bajo el Grupo G

Partiendo del conjunto $C^\infty(M; \mathbb{K})$, podemos clasificar los campos según su naturaleza:

- **Campos escalares:** $\phi : M \rightarrow \mathbb{K}$
- **Campos vectoriales:** $V : M \rightarrow TM$
- **Campos tensoriales:** $T : M \rightarrow \bigotimes^k TM \otimes \bigotimes^\ell T^*M$

La invarianza ecuacional depende de cómo los campos transforman bajo el grupo G . Por ejemplo, si G es el grupo de Lorentz:

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x), \quad (1.215)$$

donde $x' = \Lambda x$. Estas transformaciones aseguran que las ecuaciones de movimiento conservan su forma.

1.7.2 Acción y Ecuaciones de Movimiento

Sea una acción funcional definida sobre $C^\infty(M; \mathbb{K})$:

$$S[\phi] = \int_M \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi) d\text{vol}_g, \quad (1.216)$$

donde \mathcal{L} es el lagrangiano de la teoría. La invarianza de la acción bajo G implica, mediante el teorema de Noether, la existencia de corrientes conservadas asociadas a cada simetría.

³⁸Un *campo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un conjunto \mathbb{K} con dos operaciones binarias (suma y multiplicación) que cumplen: $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano con neutro 0, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano con neutro 1, y la multiplicación es distributiva sobre la suma. Ejemplos clásicos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ejemplo: Campo de Klein-Gordon

Consideremos el campo escalar de Klein-Gordon:

$$S[\psi] = \int_M \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right) d\text{vol}_g, \quad \psi \in C^\infty(M; \mathbb{R}). \quad (1.218)$$

Este campo es invariante bajo el grupo de Lorentz, y su ecuación de movimiento:

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (1.219)$$

permanece con la misma forma en todos los sistemas inerciales.

Conclusión

De lo anterior se desprende que toda teoría física significativa se construye sobre un espacio de funciones suaves $C^\infty(M; \mathbb{K})$ y un grupo de simetría G que garantiza la invarianza ecuacional. Esto sienta las bases para el análisis de commutadores y la cuantización de los campos.

1.7.3 Estructura del Grupo G

Si la estructura del grupo permite encontrar una parametrización diferenciable, es decir, un sistema de coordenadas, tenemos que la estructura de grupo de Lie de G induce de manera natural una variedad diferenciable.

En particular, la operación de grupo

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \quad \mu(g, h) = gh,$$

y la inversión

$$\iota : G \longrightarrow G, \quad \iota(g) = g^{-1},$$

son aplicaciones suaves (infinitamente diferenciables) en estas coordenadas.

De este modo G es simultáneamente una variedad diferenciable y un grupo, y a su álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

se le dota del corchete de Lie proveniente de los campos invariantes por izquierda.

1.7.4 Ejemplo: el grupo $SU(2)$ como grupo de Lie

El grupo especial unitario de grado dos se define como

$$SU(2) = \{ U \in M_2(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I, \det U = 1 \}. \quad (1.220)$$

Operaciones de grupo

La multiplicación de matrices

$$\mu : SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(2), \quad \mu(U, V) = UV, \quad (1.221)$$

y la inversión

$$\iota : SU(2) \longrightarrow SU(2), \quad \iota(U) = U^{-1} = U^\dagger, \quad (1.222)$$

son aplicaciones C^∞ , de modo que $SU(2)$ es simultáneamente un grupo y una variedad diferenciable.

Parametrización real

Todo elemento $U \in SU(2)$ puede escribirse como

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.223)$$

Proof. Sea

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (1.224)$$

1. De $U^\dagger U = I$ a las ecuaciones Calculamos

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.225)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{a}a + \bar{c}c & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{b}a + \bar{d}c & \bar{b}b + \bar{d}d \end{pmatrix}. \quad (1.226)$$

Imponiendo $U^\dagger U = I$ obtenemos las igualdades de las entradas:

$$|a|^2 + |c|^2 = 1, \quad |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad \bar{a}b + \bar{c}d = 0. \quad (1.227)$$

2. Forma de la segunda columna En \mathbb{C}^2 el subespacio ortogonal a $\vec{v}_1 = (a, c)^T$ es de dimensión 1. Consideremos el vector

$$\vec{w} := (-\bar{c}, \bar{a})^T. \quad (1.228)$$

Comprobamos que \vec{w} es ortogonal a \vec{v}_1 :

$$\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle = \bar{a}(-\bar{c}) + \bar{c}(\bar{a}) \quad (1.229)$$

$$= -\bar{a}\bar{c} + \bar{c}\bar{a} = 0. \quad (1.230)$$

Además $\|\vec{w}\|^2 = |c|^2 + |a|^2 = \|\vec{v}_1\|^2$. Por tanto, todo vector \vec{v}_2 que sea ortogonal a \vec{v}_1 y tenga la misma norma se escribe como

$$\vec{v}_2 = e^{i\theta} \vec{w} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{para algún } \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.231)$$

Es decir,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (1.232)$$

3. Imposición de $\det U = 1$ Calculemos el determinante con la forma anterior:

$$\det U = ad - bc = a(e^{i\theta}\bar{a}) - (e^{i\theta}(-\bar{c}))c = e^{i\theta}(|a|^2 + |c|^2). \quad (1.233)$$

Por la primera ecuación $|a|^2 + |c|^2 = 1$, luego

$$\det U = e^{i\theta}. \quad (1.234)$$

Imponiendo $\det U = 1$ se obtiene $e^{i\theta} = 1$. Así

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (1.235)$$

es decir $b = -\bar{c}$ y $d = \bar{a}$. Renombrando $\alpha := a$, $\beta := b$, queda

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.236)$$

4. Comprobación inversa Si tomamos

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.237)$$

entonces

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}, \quad (1.238)$$

y

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\alpha + (-\beta)(-\bar{\beta}) & \bar{\alpha}\beta + (-\beta)\bar{\alpha} \\ \bar{\beta}\alpha + \alpha(-\bar{\beta}) & \bar{\beta}\beta + \alpha\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (1.239)$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (1.240)$$

$$= I \quad (1.241)$$

por la hipótesis $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Además

$$\det U = \alpha\bar{\alpha} - \beta(-\bar{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.242)$$

Conclusión Hemos probado que las condiciones $U^\dagger U = I$ y $\det U = 1$ son equivalentes a que U tenga la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.243)$$

y viceversa. Identificando $\alpha = x_0 + ix_3$, $\beta = x_2 + ix_1$ obtenemos la identificación diferenciable $SU(2) \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$. \square

Sea

$$\alpha = x_0 + ix_3, \quad \beta = x_2 + ix_1, \quad (1.244)$$

con $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. La condición de determinante unitario se convierte en

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (1.245)$$

Por tanto,

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4. \quad (1.246)$$

Esta parametrización exhibe explícitamente a $SU(2)$ como una variedad de dimensión 3, difeomorfa a S^3 , y muestra cómo las operaciones de grupo son suaves en las coordenadas reales.

Generadores de $\mathfrak{su}(2)$

Sea la parametrización³⁹ de $SU(2)$:

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3. \quad (1.252)$$

³⁹Aunque la parametrización de $SU(2)$ utiliza cuatro números reales (x_0, x_1, x_2, x_3) , estos no son independientes, ya que deben cumplir la restricción

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (1.247)$$

Esta ecuación impone una *restricción geométrica* que reduce el número efectivo de coordenadas independientes de cuatro a tres. En términos de geometría diferencial, podemos decir que la parametrización inicial es *redundante* y que la relación cuadrática define una *superficie de restricción* dentro del espacio \mathbb{R}^4 , concretamente la 3-esfera S^3 . Por lo tanto, aunque la matriz de $SU(2)$ se exprese en cuatro parámetros, el grupo propiamente dicho es una *variedad de dimensión 3*, y su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, que corresponde al espacio tangente en la identidad, también es de dimensión 3.

Una *parametrización efectiva*, que utilice únicamente tres parámetros independientes para describir todo el grupo, se puede lograr de varias formas:

1. **Ángulos de Euler:** Se definen tres ángulos (θ, ϕ, ψ) y se expresa

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \psi}{2}, \\ x_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi - \psi}{2}, \\ x_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi - \psi}{2}, \\ x_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi + \psi}{2}, \end{aligned} \quad (1.248)$$

con $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, 4\pi]$.

2. **Eje y ángulo de rotación:** Se usa un ángulo de rotación θ y un vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, de manera que

$$g = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} (n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3), \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (1.249)$$

Aquí el ángulo θ aporta un parámetro y el vector unitario \mathbf{n} dos parámetros independientes, sumando tres en total.

Estas parametrizaciones efectivas eliminan la redundancia de la parametrización original y describen suavemente todo el grupo $SU(2)$.

Los generadores del álgebra de Lie se obtienen como derivadas parciales evaluadas en la identidad, que corresponde a $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad (1.253)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1, \quad (1.254)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad (1.255)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3. \quad (1.256)$$

donde σ_j son las matrices de Pauli⁴⁰

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.257)$$

Aunque derivamos respecto a 4 variables, notemos que $\frac{\partial U}{\partial x_0} = I$ es la identidad y, por lo tanto, no es un generador de $\mathfrak{su}(2)$, ya que los generadores deben ser de traza cero⁴¹

Por lo tanto, un conjunto de generadores linealmente independientes de $\mathfrak{su}(2)$ es

$$\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}. \quad (1.258)$$

Esto muestra que la dimensión de la álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ es 3.

por otro lado, es posible, al menos localmente, resolver la restricción

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (1.250)$$

para una de las variables, por ejemplo

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad (1.251)$$

y reescribir la matriz de $SU(2)$ únicamente en función de (x_0, x_1, x_2) . De este modo se obtiene una carta local con tres parámetros independientes, lo que permite calcular las derivadas parciales respecto a x_0, x_1, x_2 de manera explícita. Al hacerlo, los tres vectores tangentes resultantes generan directamente el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y, como es de esperarse, las matrices correspondientes son de traza cero. Esta parametrización, sin embargo, es sólo local: requiere elegir el signo de la raíz y no cubre de forma global todo el grupo.

⁴⁰Las matrices de Pauli fueron introducidas por el físico Wolfgang Pauli en 1927 para describir el espín de las partículas de espín-1/2. Forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ y cumplen la relación de conmutación $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

⁴¹Los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ deben ser matrices de traza cero porque $\mathfrak{su}(2)$ está definida como el conjunto de matrices 2×2 complejas X que son antihermíticas ($X^\dagger = -X$) y de traza cero ($\text{Tr}(X) = 0$). La condición de traza cero asegura que los exponentes e^X generen matrices unitarias con determinante uno, es decir, que pertenezcan al grupo $SU(2)$. Si $\text{Tr}(X) \neq 0$, entonces $\det(e^X) = e^{\text{Tr}(X)} \neq 1$, y por lo tanto la matriz no estaría en $SU(2)$. Además, la dimensión del espacio vectorial de la álgebra de Lie es 3, y una base comúnmente usada está dada por $T_j = \frac{i}{2}\sigma_j$, donde las matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son hermíticas, de traza cero, y multiplicadas por i se convierten en los generadores antihermíticos de $\mathfrak{su}(2)$. Las matrices de Pauli puras son *hermíticas* y, por tanto, no pertenecen directamente a $\mathfrak{su}(2)$, que exige matrices *antihermíticas* y de traza cero. Sin embargo, los generadores físicos suelen escribirse como $U(\theta) = e^{i\theta^k \sigma_k/2}$, donde el factor i en el exponente garantiza que $i\sigma_k/2 \in \mathfrak{su}(2)$.

Álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

El espacio tangente en la identidad es

$$\mathfrak{su}(2) := T_I SU(2) = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X, \operatorname{tr} X = 0 \}. \quad (1.259)$$

ya que sea un elemento $U \in SU(2)$, entonces satisface

$$U^\dagger U = I. \quad (1.260)$$

Si escribimos U cercano a la identidad usando el mapa exponencial

$$U = e^X, \quad X \in \mathfrak{su}(2), \quad (1.261)$$

entonces debemos tener

$$U^\dagger U = e^{X^\dagger} e^X = I \implies e^{X^\dagger + X} = I. \quad (1.262)$$

Para matrices pequeñas X , esto implica

$$X^\dagger + X = 0 \implies X^\dagger = -X, \quad (1.263)$$

es decir, los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ son anti-hermíticos.

Una base conveniente es

$$T_j := \frac{i}{2} \sigma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.264)$$

ya que en física es habitual elegir como base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ las matrices

$$T_j = \frac{i}{2} \sigma_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.265)$$

ya que esta convención presenta varias ventajas. Primero, las matrices de Pauli σ_j son hermíticas y de traza cero, por lo que al multiplicarlas por i se vuelven antihermíticas, garantizando que las exponentiales $e^{\theta^j T_j}$ sean unitarias sin introducir signos adicionales. Segundo, la normalización por $1/2$ simplifica los corchetes de conmutación, obteniéndose

$$[T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c, \quad (1.266)$$

con las constantes de estructura dadas directamente por el símbolo de Levi-Civita. Finalmente, esta elección es coherente con la mecánica cuántica y las teorías gauge: los operadores de espín se escriben como $S_j = \hbar T_j$ y en el modelo electrodébil los campos de gauge W_μ^j se acoplan exactamente con esta misma normalización.

1.7.5 El mapeo exponencial en grupos de Lie G

Sea G un *grupo de Lie* con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$, el espacio tangente en la identidad $e \in G$. El *mapeo exponencial* es una aplicación suave

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G \quad (1.267)$$

que asigna a un vector tangente $X \in \mathfrak{g}$ el elemento de G obtenido como el flujo en $t = 1$ del *campo vectorial invariante por izquierda* generado por X .

Campos invariantes por izquierda

Decimos que X es **invariante a la izquierda** si, para todo $g, h \in G$,

$$(L_h)_* X_g = X_{hg},$$

donde $L_h : G \rightarrow G$ es la *translación a la izquierda* definida por $L_h(g) = hg$ y $(L_h)_*$ es su diferencial.

Ejemplo 4. Consideremos el grupo aditivo $G = \mathbb{R}$. La translación a la izquierda es $L_a(x) = a + x$. El campo vectorial constante

$$X(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

es invariante a la izquierda, ya que

$$(L_a)_* X(x) = X(x + a) = 1 = X_{a+x}.$$

□

Otro ejemoplo más elaborado es el siguiente:

Ejemplo 5. Sea $G = SO(3)$, el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^3 . Cada elemento $R \in SO(3)$ puede interpretarse como una matriz de rotación, y la translación a la izquierda es

$$L_S(R) = SR, \quad S, R \in SO(3).$$

Consideremos el vector X definido por su valor en la identidad $I \in SO(3)$ como

$$X_I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_I SO(3).$$

Sea $R \in SO(3)$. El campo invariante a la izquierda generado por X_I es

$$X_R := (L_R)_* X_I = RX_I, \quad \forall R \in SO(3),$$

es decir, en cada punto R del grupo, el vector tangente se obtiene multiplicando X_I por R .

Este campo representa una rotación infinitesimal alrededor del eje z que se transporta a todos los puntos de $SO(3)$ de manera coherente con la estructura de grupo.

□

Dado $X \in \mathfrak{g}$, definimos el campo vectorial invariante por izquierda X^L en G mediante

$$X^L(g) := (L_g)_* X, \quad (1.268)$$

donde $L_g : G \rightarrow G$ es la multiplicación por la izquierda $L_g(h) = gh$ y $(L_g)_*$ es su diferencial (pushforward)

$$(L_g)_* : T_h G \rightarrow T_{gh} G. \quad (1.269)$$

Intuitivamente, esto significa que el vector $X \in T_e G$ se “transporta” a $T_g G$ a través de la multiplicación a la izquierda. De manera equivalente, $X^L(g)$ puede verse como la derivada en $t = 0$ de la curva

$$\gamma_g(t) := g \exp(tX), \quad (1.270)$$

es decir,

$$X^L(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp(tX). \quad (1.271)$$

Esta interpretación hace evidente que la curva integral de X^L que pasa por g es $\gamma_g(t)$.

Una propiedad fundamental es la *invarianza por izquierda*:

$$(L_h)_* X^L(g) = X^L(hg), \quad \forall h, g \in G. \quad (1.272)$$

Definición del mapeo exponencial

Sea $\gamma(t)$ la curva integral única de X^L que pasa por la identidad:

$$\gamma(0) = e, \quad \dot{\gamma}(t) = X^L(\gamma(t)). \quad (1.273)$$

Se define entonces

$$\exp(X) := \gamma(1). \quad (1.274)$$

Propiedades

El mapeo exponencial cumple las siguientes propiedades:

1. $\exp(0) = e$.
2. $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = X$.
3. \exp es un difeomorfismo local cerca de $0 \in \mathfrak{g}$ hacia una vecindad de $e \in G$.
4. Para grupos de Lie matriciales $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, el mapeo exponencial coincide con la *exponencial de matrices*:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \quad (1.275)$$

Ejemplo en $SU(2)$

Tomemos un generador de $\mathfrak{su}(2)$

$$T_3 = \frac{i}{2} \sigma_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.276)$$

Como $T_3^2 = -\frac{1}{4}I$, la serie exponencial se suma exactamente:

$$\exp(tT_3) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) I + 2T_3 \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix}. \quad (1.277)$$

1.7.6 Curvas integrales y pushforward

Sea $x \in G$ y escribamos $x = hU$ para algún $h, U \in G$. Entonces, aplicando la definición de X^L y la propiedad de invarianza por izquierda, se tiene

$$(L_h)_* X^L(U) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h U \exp(tX) = X^L(hU) = X^L(x), \quad (1.278)$$

lo que muestra cómo el pushforward transporta el vector tangente de U a $x = hU$ de manera natural usando la curva $U \exp(tX)$.

Este es un elemento genérico de $SU(2)$ que describe una rotación alrededor del eje 3.

Los campos invariantes por izquierda son fundamentales porque permiten identificar el álgebra de Lie \mathfrak{g} con el espacio de campos vectoriales en G que codifican la estructura del grupo. A través de ellos, el corchete de Lie se traduce directamente en el conmutador de campos vectoriales:

$$[X^L, Y^L] = [X, Y]^L. \quad (1.279)$$

lo cual hace posible estudiar la geometría y la dinámica en el grupo usando sólo información local en la identidad. En particular, generan los flujos de traslación izquierda y sirven como base natural para definir derivadas covariantes, conexiones y formas de Maurer–Cartan⁴².

Ejemplo Tomemos por ejemplo $X = T_3 = \frac{i}{2}\sigma_3$. Dado un elemento genérico

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (1.280)$$

la curva utilizada para definir X^L es

$$\gamma(t) = U \exp\left(t \frac{i}{2}\sigma_3\right) = U \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix}. \quad (1.281)$$

Derivando en $t = 0$ obtenemos

$$X^L(U) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U T_3. \quad (1.282)$$

Es decir, el campo invariante por izquierda asociado a T_3 en el punto U es simplemente

$$X^L(U) = U T_3, \quad (1.283)$$

lo cual es coherente con la definición general.

De manera análoga, para T_1 o T_2 basta sustituir la matriz correspondiente. Los tres campos $\{T_1^L, T_2^L, T_3^L\}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_i^L, T_j^L] = \varepsilon_{ijk} T_k^L, \quad (1.284)$$

heredando así la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

⁴²Las formas de Maurer–Cartan son 1-formas diferenciales definidas en un grupo de Lie G que codifican la estructura de la álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada. En particular, la forma de Maurer–Cartan izquierda θ^L satisface la ecuación de Maurer–Cartan $d\theta^L + \frac{1}{2}[\theta^L, \theta^L] = 0$, lo que permite relacionar la geometría del grupo con la estructura algebraica de \mathfrak{g} . Estas formas son fundamentales en la teoría de conexiones, integrabilidad y en la construcción de lagrangianos invariantes en física teórica.

1.7.7 Perspectiva física y conclusión

En física, el grupo $SU(2)$ aparece de manera natural al describir espín, isospín y otros grados de libertad cuánticos.

Por definición, los elementos de $\mathfrak{su}(2)$ son matrices *antihermíticas* y de traza cero. Sin embargo, en física resulta más conveniente trabajar con matrices *hermíticas*, ya que corresponden a *observables*. La clave para conciliar ambas descripciones es modificar el mapeo exponencial con un factor $-i$:

$$U(\theta) = \exp[-i\theta^k H_k], \quad (1.285)$$

donde los H_k son matrices hermíticas. De esta manera, los generadores matemáticos de la álgebra son $-iH_k \in \mathfrak{su}(2)$, pero podemos pensar directamente en los H_k como los *generadores físicos*, es decir, los observables que se pueden medir.

Un ejemplo paradigmático son las matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Aunque no son antihermíticas, al escribir

$$U(\theta) = \exp\left[-i\frac{\theta^k \sigma_k}{2}\right] \quad (1.286)$$

queda claro que el álgebra está generada por $-i\sigma_k/2$, mientras que las σ_k mismas se interpretan como los operadores de espín medibles. Este razonamiento se generaliza: *cualquier matriz hermética de traza cero puede servir como generador físico si se incluye el factor $-i$ en el mapeo exponencial*.

La elección del signo negativo en el exponente se alinea con la convención estándar en mecánica cuántica para la evolución temporal,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle, \quad (1.287)$$

donde H es el Hamiltoniano. En este contexto, las matrices hermíticas actúan como generadores de rotaciones y de la evolución temporal, manteniendo la consistencia con la estructura matemática del grupo de Lie.

En conclusión, la diferencia entre la definición matemática y el uso físico se resuelve modificando el mapeo exponencial con un factor imaginario. Esto permite tratar directamente a las matrices hermíticas—los observables—como generadores físicos, conservando la coherencia con la estructura algebraica de $SU(2)$ y de manera más general, de cualquier grupo de Lie compacto.

1.8 Dinámica de la Teoría

En la sección anterior revisamos la dinámica de la teoría subyacente a través de un funcional S , que nos permite definir la dinámica subyacente, es decir:

2.- La dinámica de la teoría viene gobernada por una acción lagrangiana S .

(1.288)

Funcional de Acción y Ecuaciones de Movimiento

Sea la acción S definida sobre el espacio de funciones suaves $C^\infty(M; \mathbb{K})$:

$$S[\phi] = \int_M \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi) d\text{vol}_g, \quad (1.289)$$

donde \mathcal{L} es el lagrangiano de la teoría, que depende de los campos ϕ y sus derivadas covariantes.

Principio de Acción Estacionaria

La dinámica de los campos se obtiene imponiendo que la acción sea estacionaria respecto a variaciones infinitesimales $\delta\phi$ que se anulan en el borde de M :

$$\delta S[\phi] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta\phi} = 0. \quad (1.290)$$

Esto conduce a las **ecuaciones de Euler-Lagrange** para los campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0. \quad (1.291)$$

1.8.1 Teoría Gauge Yang-Mills

Una **transformación gauge** es una transformación local de un campo asociada a un grupo de simetría G del *espacio interno*. Esto puede formalizarse de la siguiente forma:

Sea M una variedad diferenciable (el espacio-tiempo) y

$$\pi : \mathcal{E} \rightarrow M \quad (1.292)$$

un *haz vectorial complejo* de rango N . Esto significa que en cada punto $x \in M$ la fibra \mathcal{E}_x es un espacio vectorial complejo de dimensión N ,

$$\mathcal{E}_x \simeq \mathbb{C}^N, \quad (1.293)$$

y localmente \mathcal{E} es trivializable: existen secciones locales $|e_a(x)\rangle$, $a = 1, \dots, N$, que forman una base de \mathcal{E}_x .

Una *derivada covariante* en el haz \mathcal{E} es un operador lineal

$$D : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathcal{E}) \quad (1.294)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$D(f\psi) = df \otimes \psi + fD\psi, \quad f \in C^\infty(M), |\psi\rangle \in \Gamma(\mathcal{E}). \quad (1.295)$$

De este modo, los campos de materia $|\psi(x)\rangle$ se consideran secciones de \mathcal{E} :

$$|\psi\rangle \in \Gamma(\mathcal{E}). \quad (1.296)$$

Un *grupo de gauge* G actúa en cada fibra \mathcal{E}_x a través de automorfismos lineales, lo que se formaliza mediante una *representación lineal*

$$\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{E}_x) \simeq GL(N, \mathbb{C}). \quad (1.297)$$

Usualmente se toma ρ *fiel*⁴³ para que cada elemento de G corresponda a un automorfismo distinto de la fibra. Esto permite pensar a G como un *subgrupo*⁴⁴ de $GL(N, \mathbb{C})$ i.e.

$$G \leq GL(N, \mathbb{C}) \quad (1.298)$$

De este modo, cada elemento $g \in G$ define un automorfismo lineal invertible.

Una *transformación gauge* local es una aplicación suave

$$\hat{U} : M \rightarrow G \quad (1.299)$$

que asigna a cada punto $x \in M$ un elemento del grupo estructural G . Mediante la representación del grupo en \mathbb{C}^N , este elemento actúa como un automorfismo lineal de la fibra \mathcal{E}_x , variando suavemente con x .

Bajo esta transformación, un campo $|\psi(x)\rangle \in \mathbb{C}^N$ se transforma como

$$|\psi(x)\rangle \longrightarrow |\psi'(x)\rangle = \hat{U}(x) |\psi(x)\rangle. \quad (1.300)$$

Intuitivamente, $\hat{U}(x)$ describe cómo el vector $|\psi(x)\rangle \in \mathcal{E}_x$ se transforma cuando se aplica la simetría interna representada por el grupo gauge G .

La *conexión gauge* $\mathcal{A}_\mu(x)$, que define la derivada covariante sobre \mathcal{E} , puede identificarse localmente con la matriz de conexión $\Pi_{\mu a}^b$, es decir

$$\Pi_{\mu a}^b = \mathcal{A}_{\mu a}^b. \quad (1.301)$$

⁴³Una representación $\rho : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ se dice *fiel* si es inyectiva, es decir, si $\rho(g_1) = \rho(g_2)$ implica necesariamente $g_1 = g_2$. De este modo, distintos elementos del grupo G se representan por transformaciones lineales distintas en la fibra.

⁴⁴

Definición 1.8.1 (Subgrupo). *Sea (G, \cdot) un grupo. Un subconjunto $H \subseteq G$ se llama subgrupo si H es un grupo con la operación inducida de G . Equivalentemente, H es un subgrupo de G si y sólo si cumple:*

1. $e \in H$;
2. si $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 h_2 \in H$;
3. si $h \in H$, entonces $h^{-1} \in H$.

Si escribimos

$$|\psi(x)\rangle = \psi^a(x) |e_a\rangle, \quad (1.302)$$

entonces

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\psi^a |e_a\rangle) &= \partial_\mu \psi^a |e_a\rangle + \psi^a \partial_\mu |e_a\rangle \\ &= \partial_\mu \psi^a |e_a\rangle + \psi^a \Pi_{\mu a}^b |e_b\rangle \\ &= (\partial_\mu \psi^a + \psi^b \mathcal{A}_{\mu b}^a) |e_a\rangle =: (D_\mu \psi^a) |e_a\rangle, \end{aligned}$$

es decir

$$D_\mu \psi^a = \partial_\mu \psi^a + \psi^b \mathcal{A}_{\mu b}^a. \quad (1.303)$$

En forma matricial compacta:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) \psi. \quad (1.304)$$

Frecuentemente se expresa la conexión como una 1-forma con valores en \mathfrak{g} :

$$\mathcal{A}_\mu = -ig A_\mu^a T^a, \quad (1.305)$$

donde g es la constante de acoplamiento, $A_\mu^a(x)$ son las componentes reales y T^a los generadores del álgebra de Lie \mathfrak{g} . (Con la convención anterior T^a hermíticos, \mathcal{A}_μ resulta antihermítica.)

El *tensor de campo* (o curvatura) se define por el conmutador de derivadas covariantes:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (1.306)$$

o, en lenguaje de formas,

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{g}. \quad (1.307)$$

Geométricamente, una transformación gauge se interpreta como una *redefinición local de la base en el espacio interno* (fibras del haz vectorial) sin alterar las cantidades físicas observables i.e. un *cambio de coordenadas*.

Finalmente, el operador de gauge local puede escribirse (en la vecindad del elemento identidad) como

$$\hat{U}(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}, \quad (1.308)$$

donde $\alpha^a(x)$ son parámetros locales.

Reglas de Transformación

- Para un campo de materia en la representación R del grupo de Lie G :

$$|\psi(x)\rangle \longrightarrow |\psi'(x)\rangle = \hat{U}(x) |\psi(x)\rangle \quad (1.309)$$

- La conexión (campo gauge) se transforma como

$$\mathcal{A}_\mu(x) \longrightarrow \mathcal{A}'_\mu(x) = \hat{U}(x) \mathcal{A}_\mu(x) \hat{U}^{-1}(x) - (\partial_\mu \hat{U}(x)) \hat{U}^{-1}(x). \quad (1.310)$$

Nótese que con nuestra convención $\mathcal{A}_\mu = -ig A_\mu^a T^a$, la fórmula ya incorpora el factor de acoplamiento g .

- La derivada covariante se transforma covariantemente:

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'(x) = \hat{U}(x) D_\mu \psi(x). \quad (1.311)$$

- El tensor de campo se define como el conmutador de derivadas covariantes:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (1.312)$$

Bajo una transformación gauge se transforma como

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \hat{U}(x) F_{\mu\nu}(x) \hat{U}^{-1}(x), \quad (1.313)$$

de modo que los invariantes físicos, como $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$, permanecen invariantes.

Transformación en Componentes

Si escribimos la conexión en una base de generadores T^a del álgebra de Lie \mathfrak{g} ,

$$\mathcal{A}_\mu(x) = -ig A_\mu^a(x) T^a, \quad (1.314)$$

y parametrizamos una transformación gauge local como

$$\hat{U}(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}, \quad (1.315)$$

entonces, para infinitesimas transformaciones ($\alpha^a(x)$ pequeños), se obtiene

$$\delta A_\mu^a(x) = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc} \alpha^b(x) A_\mu^c(x), \quad (1.316)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura de \mathfrak{g} , definidas por

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (1.317)$$

En particular:

- Para $G = U(1)$ (electromagnetismo), $f^{abc} = 0$, y la regla se reduce a

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.318)$$

- Para $G = SU(2)$ o $SU(3)$, aparecen los términos no abelianos con las constantes de estructura.

Caso Particular Abeliano ($U(1)$)

En el caso de electromagnetismo, donde $G = U(1)$, los generadores son $T = 1$, de modo que el operador de transformación gauge se reduce a

$$U(x) = e^{-i\alpha(x)} \equiv e^{-i\Lambda(x)}.$$

Las expresiones generales se simplifican de la siguiente manera:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)} \psi(x),$$

donde q es la carga del campo de materia.

La derivada covariante se escribe como

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu,$$

y se transforma covariantemente:

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)} D_\mu \psi(x).$$

El tensor de campo electromagnético se define como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

y resulta invariante bajo transformaciones gauge:

$$F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x).$$

Esto implica que todas las cantidades físicas construidas a partir de $F_{\mu\nu}$, como el lagrangiano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

son invariantes de gauge.

En resumen, en el caso abeliano $U(1)$ la estructura es más simple: no aparecen términos de conmutador $[A_\mu, A_\nu]$, y la invarianza gauge se traduce en la conocida libertad de redefinir el potencial electromagnético sin afectar a los observables físicos (el campo eléctrico y magnético).

Transformación de la conexión bajo gauge

Bajo una transformación de gauge local

$$\psi \rightarrow \psi' = U(x)\psi, \quad (1.319)$$

la derivada covariante debe transformarse covariantemente:

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = UD_\mu \psi. \quad (1.320)$$

Sustituyendo $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, se obtiene la transformación de la conexión:

$$(\partial_\mu + A'_\mu)U\psi = U(\partial_\mu + A_\mu)\psi. \quad (1.321)$$

Resolviendo para A'_μ :

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (1.322)$$

Caso de grupos unitarios. Para grupos unitarios $U \in U(N)$, se cumple que

$$U^{-1} = U^\dagger, \quad (1.323)$$

por lo que la transformación se puede escribir como

$$\boxed{A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U)U^\dagger}. \quad (1.324)$$

Sustituyendo $U = e^{-i\alpha}$, se obtiene

$$\partial_\mu U U^\dagger = \partial_\mu (e^{-i\alpha}) e^{i\alpha} = -i\partial_\mu \alpha, \quad (1.325)$$

y por lo tanto

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + i\partial_\mu \alpha. \quad (1.326)$$

Casos Abierto y No Abierto

Abierto $U(1)$: Para un grupo Abierto los generadores T^a son triviales y la transformación se reduce a

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha. \quad (1.327)$$

No Abierto: Para un grupo no Abierto,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger. \quad (1.328)$$

Teoría de Yang-Mills

Con estas convenciones, la teoría de Yang-Mills se construye a partir de la conexión A_μ y la derivada covariante D_μ .

Tensor de curvatura (campo de fuerza)

$$F_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.329)$$

Sustituyendo nuestra definición de A_μ :

$$F_{\mu\nu} = -ig \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) T^a, \quad (1.330)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del álgebra de Lie del grupo de gauge.

Transformación de $F_{\mu\nu}$

Bajo una transformación de gauge $U = e^{-i\alpha^a T^a}$:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger \quad (1.331)$$

para grupos unitarios. Esto garantiza que cantidades construidas a partir de $F_{\mu\nu}$ y trazas sobre la representación sean invariantes de gauge.

Lagrangiano de Yang-Mills

El Lagrangiano de Yang-Mills se escribe como

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (1.332)$$

donde Tr indica traza en la representación de los generadores T^a , asegurando que el Lagrangiano sea real e invariante bajo transformaciones de gauge.

Resumen de Convenciones

- Operador de gauge: $U(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}$
- Conexión: $A_\mu = -igA_\mu^a T^a$
- Derivada covariante: $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$
- Transformación de la conexión:

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1} = UA_\mu U^\dagger + i\partial_\mu \alpha \quad (1.333)$$

- Campo de fuerza:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.334)$$

- Transformación de $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger \quad (1.335)$$

- Lagrangiano de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (1.336)$$

1.9 Principio de Máxima Energía

Es sabido que en Física se considera la primera variación del funcional con respecto al campo, i.e.

$$S[\phi] = \int_M F(\phi(x)) dx, \quad (1.337)$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = 0, \quad (1.338)$$

lo cual expresa que ϕ es una configuración estacionaria del funcional de acción, es decir, satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange.

Si consideramos ahora el funcional dado por su variación, i.e.

$$G[\phi] := \int_M \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} dx, \quad (1.339)$$

y calculamos su derivada funcional, al igualarla a cero obtenemos

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(y)} = \int_M \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x)} dx.$$

Si ϕ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, entonces

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = 0 \implies G[\phi] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(y)} = 0.$$

De este modo, las soluciones estacionarias de S son también puntos críticos del funcional G , lo cual refleja de manera formal una estructura jerárquica de variaciones en el espacio de funcionales.

1.9.1 Categoría de Funcionales

Sea \mathcal{F} un espacio de funciones definido sobre un dominio M (por ejemplo $C^\infty(M)$, $L^p(M)$, $H^1(M)$, etc.). Un *funcional* es una aplicación

$$F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}. \quad (1.340)$$

Más generalmente, se permite que un funcional tome valores en otro espacio de funciones. En tal caso, un funcional es una aplicación

$$F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (1.341)$$

donde \mathcal{G} es otro espacio funcional (por ejemplo $C^\infty(M)$, $L^2(M)$, etc.). Es decir, el resultado de evaluar un funcional no tiene por qué ser un número, sino que puede ser otra función.

Típicamente, un funcional de valor numérico se expresa mediante

$$F[\phi] = \int_M \mathcal{L}(x, \phi(x), \partial\phi(x), \dots) dx, \quad (1.342)$$

mientras que un funcional cuyo resultado es una función suele tomar la forma

$$F[\phi](x) = \mathcal{L}(x, \phi(x), \partial\phi(x), \dots), \quad (1.343)$$

produciendo para cada ϕ una nueva función definida sobre M .

En el cálculo variacional, la variación o derivada funcional de F en la dirección η se define como

$$\delta F[\phi; \eta] := \frac{d}{d\varepsilon} F[\phi + \varepsilon\eta] \bigg|_{\varepsilon=0}, \quad (1.344)$$

y cuando puede escribirse como

$$\delta F[\phi; \eta] = \int_M \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \eta(x) dx, \quad (1.345)$$

se dice que F admite una derivada funcional $\delta F[\phi]/\delta\phi(x)$.

La *categoría de funcionales*, denotada $\mathbf{Func}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, se define como sigue:

1. **Objetos:** todos los funcionales $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) que cumplen propiedades específicas, como linealidad, continuidad, diferenciabilidad o convexidad.
2. **Morfismos:** transformaciones $T : F_1 \mapsto F_2$ que preservan la estructura de interés. Por ejemplo:
 - Para funcionales lineales, T podría ser una combinación lineal que lleva F_1 a F_2 .
 - Para funcionales diferenciables, T podría ser una composición con un operador diferencial: $F_2[\phi] = F_1[L(\phi)]$.
3. **Composición de morfismos:** dada por la composición usual de transformaciones:

$$(T_2 \circ T_1)(F) = T_2(T_1(F)). \quad (1.346)$$

4. **Identidad:** para cada funcional F , el morfismo identidad es

$$\text{id}(F) = F. \quad (1.347)$$

Interpretación: Esta categoría generaliza la noción de espacios vectoriales y operadores lineales a espacios de funciones que toman valores escalares, y permite estudiar funcionales desde un punto de vista estructural y algebraico, conectando con análisis funcional y física matemática.

1.9.2 Ejemplo de la Categoría de Funcionales

Sea $\mathcal{F} = L^2([0, 1])$, el espacio de funciones cuadrado-integrables en el intervalo $[0, 1]$.

1. **Objeto (funcional lineal):**

$$F[\phi] := \int_0^1 x \phi(x) dx$$

Este funcional asigna a cada función $\phi \in L^2([0, 1])$ un número real.

2. **Objeto (otro funcional lineal):**

$$G[\phi] := \int_0^1 \phi(x) dx$$

3. **Morfismo entre objetos:** Definimos un morfismo T que combina linealmente los funcionales:

$$T(F) := 2F + 3G$$

Entonces T transforma objetos $F, G \in \mathbf{Func}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ en otro objeto de la misma categoría, preservando la linealidad.

4. **Composición de morfismos:** Si definimos otro morfismo $S(F) := F + G$, la composición $T \circ S$ es

$$(T \circ S)(F) = T(S(F)) = T(F + G) = 2(F + G) + 3G = 2F + 5G$$

lo cual sigue siendo un funcional lineal sobre \mathcal{F} .

Interpretación: Los objetos son los funcionales F, G , los morfismos son combinaciones lineales que transforman funcionales en funcionales de la misma categoría, y la identidad sería $\text{id}(F) = F$. Este ejemplo muestra cómo la categoría $\mathbf{Func}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ funciona de manera análoga a la categoría de espacios vectoriales y operadores lineales, pero ahora en el contexto de funcionales sobre un espacio de funciones.

1.9.3 Ejemplo: Klein–Gordon como ecuación funcional

Sea el funcional de acción de un campo escalar $\phi(x)$ en el espacio-tiempo $M = \mathbb{R}^{1,3}$:

$$S[\phi] := \int_M \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] d^4x.$$

Definimos el nuevo funcional a partir de la derivada funcional de $S[\phi]$ i.e.: tratamos de encontrar el funcional $G[\phi]$ que satisfaga la siguiente ecuación de funcionales.

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi} = S[\phi]$$

y que cumpla

$$\frac{\delta G^2[\phi]}{\delta \phi} = 0 \tag{1.348}$$

La derivada funcional explícita es

$$G[\phi] = -(\square + m^2)\phi(x), \quad \square := \partial_\mu \partial^\mu.$$

Planteamos la dinámica funcional como ecuación diferencial mediante:

$$\frac{\delta^2 G[\phi]}{\delta^2 \phi(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(\frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \right) = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = 0,$$

lo cual conduce a la ecuación de Klein–Gordon clásica:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0.$$

Interpretación: Plantear $\delta G[\phi]/\delta \phi = 0$ equivale a buscar los puntos críticos del funcional de acción $S[\phi]$ y describe la dinámica del campo $\phi(x)$ mediante su ecuación diferencial asociada.

El segundo lado de la ecuación corresponde a la variación de la acción fija $\delta[\phi]$ de la acción de Klein-Gordon y el primer factor corresponde a a encontrar.

En este contexto encontrar $G[\phi]$ de tal forma que satisfaga la ecuación funcional es pedir que el funcional G este escrito como un funcional Lagrangiano que dependa de $\mathcal{L}'(\phi, \partial_\mu \phi)$ tal que

$$G[\phi] := \int L'(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.349)$$

i.e.

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial L'}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) := \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

su segunda variación de reproduce la ecuación de Klein-Gordon. y nos general una acuación diferencial para la forma del lagrangiano \mathcal{L}'

1.9.4 Funcional asociado a la densidad de Klein–Gordon

Sea $\phi(x)$ un campo escalar. Definimos el funcional $G[\phi]$ como aquel cuya derivada funcional con respecto a $\phi(x)$ reproduce la densidad del Lagrangiano de Klein–Gordon:

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} := \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Interpretación: Este funcional $G[\phi]$ se introduce como un objeto formal que codifica la densidad de energía del campo escalar. No se asume que $G[\phi]$ sea la acción física, sino un funcional cuya derivada funcional da directamente la forma del Lagrangiano de Klein–Gordon, el cual representa el lagrangiano correcto de la teoría.

1.9.5 Resolución formal para $G[\phi]$

Queremos encontrar un funcional $G[\phi]$ tal que su derivada funcional cumpla

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2.$$

Si suponemos que $G[\phi]$ depende únicamente de ϕ , la derivada funcional no podría generar el término $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, que involucra derivadas. Por lo tanto, el integrando de G debe contener productos del tipo $\phi(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)$.

Probemos con el ansatz

$$\mathcal{F}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{6} m^2 \phi^3.$$

Al calcular la derivada parcial respecto de ϕ se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

que coincide exactamente con la expresión deseada.

Aunque en una definición estricta de derivada funcional aparecería un término adicional que impondremos que sea cero i.e.

$$-\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \equiv 0$$

esto equivale a

$$-\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = -\partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi) \quad (1.350)$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción $G[\phi]$ esta dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}} - \underbrace{\partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi)}_{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right)}$$

(1.351)

en la práctica (y de manera usual en física teórica) se ignora este término tras integrar por partes o al adoptar la convención de que la ecuación dada ya está simplificada⁴⁵.

Finalmente, integramos sobre el espacio-tiempo y obtenemos

$$G[\phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \phi(x) \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{6} m^2 \phi(x)^3 \right) + \text{const.}$$

cuyo *funcional derivativo* obtenido a partir de el es el funcional de Klein-Gordon. i.e.

$$S[\phi] := \int_M \frac{\delta G[\phi(x)]}{\delta \phi(x)} = \int_M \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.352)$$

y es tal que

$$\frac{\delta G[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = -(\square + m^2) \phi(x) \delta(x - y) \quad (1.353)$$

1.10 Segunda Derivada Funcional de $G[\phi]$

Queremos calcular la segunda derivada funcional de $G[\phi]$. Partimos de la primera derivada funcional i considerando la teoría módulo 4-divergencia tenemos:

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2.$$

Para la segunda derivada funcional, buscamos:

$$\frac{\delta^2 G[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x)}.$$

1.10.1 Término $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

Utilizando las propiedades de linealidad y localización, e integración por partes tenemos:

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} (\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)) = -\delta(x - y) \square \phi(x).$$

⁴⁵Aquí se ignoran los términos de divergencia total, como es usual en física teórica, para simplificar la derivada funcional.

1.10.2 Término $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$

La derivada es:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\left(-\frac{1}{2}m^2\phi(x)^2\right) = -m^2 \cdot \phi(x) \cdot \delta(x-y).$$

1.10.3 Resultado Combinado

La segunda derivada funcional combinada es:

$$\frac{\delta^2 G[\phi]}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} = -\delta(x-y) (\square\phi(x) + m^2\phi(x)).$$

Este resultado refleja cómo la variación funcional lleva a la ecuación de onda asociada al campo de Klein-Gordon.

1.10.4 Nueva dinámica a partir del funcional $G[\phi]$

Consideremos el funcional auxiliar

$$G[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{6}m^2 \phi^3 \right).$$

A diferencia de la acción de Klein-Gordon $S[\phi]$, este funcional puede interpretarse como generador de una *dinámica alternativa* si imponemos que su segunda derivada funcional se anule:

$$\frac{\delta^2 G[\phi(x)]}{\delta^2\phi(y)} = 0.$$

Este funcional tiene la ventaja que su primera derivada funcional representa el Lagrangiano de KG i.e.

$$S[\phi] := \int_M \frac{\delta G}{\delta\phi} = \int_M \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} = \int_M \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{6}m^2 \phi^3 \quad (1.354)$$

Nota: Esta dinámica es totalmente consistente desde el punto de vista formal de derivadas funcionales, pero describe un sistema físico diferente al modelo de Klein-Gordon clásico pero reducible a el módulo 4-divergencias.

1.10.5 Cuantización del campo asociado a $G[\phi]$ en primer nivel

Consideremos la ecuación de campo no lineal derivada del funcional

$$G[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{6}m^2 \phi^3 \right) :$$

1. Formalismo canónico. El momento conjugado canónico se define como

$$\pi(x) := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_0\phi)} = \phi \partial^0 \phi.$$

La Hamiltoniana canónica correspondiente es

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{F} = \frac{1}{2} \phi (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \phi (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{6} m^2 \phi^3.$$

2. Conmutadores en la cuantización. Al cuantizar, promovemos el campo y el momento a operadores:

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \quad \hat{\pi}(t, \mathbf{x}),$$

y se imponen los conmutadores canónicos

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] = [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0.$$

1.10.6 Cuantización del campo asociado $G[\phi]$ a segundo nivel

1.10.7 De la “aceleración” de $G[\phi]$ a la dinámica cuántica

Consideremos nuevamente el funcional auxiliar

$$G[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{6} m^2 \phi^3 \right),$$

y definamos su “aceleración funcional” como la segunda derivada funcional:

$$\frac{\delta^2 G[\phi]}{\delta^2 \phi}.$$

1. Dinámica no lineal clásica. Imponer que la aceleración funcional se anule:

$$\frac{\delta^2 G[\phi]}{\delta \phi^2} = 0,$$

reproduce la ecuación del campo de KG.

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\partial_t^2 + \nabla^2.$$

La primera variación funcional del campo reproduce la ecuación:

$$\phi \square \phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = 0.$$

juntas definen una nueva dinámica clásica interactiva del campo escalar.

$$\begin{cases} (\square + m^2) \phi(x) = 0, \\ \phi \square \phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = 0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones, consideradas en conjunto, definen una nueva dinámica clásica interactiva para el campo escalar.

Cuantizando mutuamente tenemos:

1.10.8 Cuantizando mutuamente

Partimos de las dos ecuaciones que consideramos conjuntamente:

$$\begin{cases} (\square + m^2) \phi(x) = 0, \\ \phi(x) \square \phi(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}m^2 \phi^2(x) = 0. \end{cases}$$

1. Cuantización canónica de Klein–Gordon (teoría libre). Promovemos el campo y su momento conjugado $\pi_S(t, \mathbf{x}) = \partial^0 \phi(t, \mathbf{x})$ a operadores y imponemos

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}_S(t, \mathbf{y})] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] = [\hat{\pi}_S(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}_S(t, \mathbf{y})] = 0.$$

La expansión en modos (en volumen grande) es

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}), \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},$$

con $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})$. El propagador libre es el operador inverso del cuadrivariado cinético:

$$(\square + m^2) \Delta_F(x - y) = -i\hbar \delta^{(4)}(x - y).$$

2. Cuantización canónica de la teoría derivada de $G[\phi]$ (teoría no lineal). Para $G[\phi]$ el momento conjugado clásico que obtenemos es

$$\pi_G(x) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \phi \partial^0 \phi,$$

y promoviendo a operadores imponemos (formalmente)

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}_G(t, \mathbf{y})] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

La Hamiltoniana clásica asociada es

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2} \phi (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \phi (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{6} m^2 \phi^3,$$

y su versión cuántica \hat{H}_G requiere especificar un criterio de ordenamiento (p. ej. normal ordering) para evitar ambigüedades.

3. Relación práctica entre ambas cuantizaciones (cuantizando mutuamente).

- *Línea base (KG libre).* Usamos la cuantización de Klein–Gordon como punto de partida: su espacio de Fock y su propagador Δ_F sirven como referencia para construir la teoría interactiva por perturbaciones.
- *Perturbación alrededor de una solución de KG.* Es conveniente separar el campo en una solución de fondo ϕ_0 y fluctuaciones φ ,

$$\phi = \phi_0 + \varphi, \quad \square \phi_0 + m^2 \phi_0 = 0,$$

y expandir la acción efectiva (o el funcional G) en potencias de φ . El término cuadrático en φ determina el propagador efectivo; términos de orden superior generan vértices de interacción.

- *Vertices e interacción.* Al expandir \mathcal{H}_G o $G[\phi]$ aparecen términos cúbicos y mixtos que actúan como vértices en diagramas de Feynman; la cuantización perturbativa se realiza usando las reglas habituales: líneas con Δ_F y vértices derivados de los términos no lineales.
- *Ambigüedades y regularización.* La presencia de productos de operadores en el mismo punto exige regularización y renormalización. Además, la definición del momento $\pi_G = \phi \partial^0 \phi$ introduce problemas de dominio y ordenamiento que deben resolverse para obtener \hat{H}_G autoadjunto y con espectro físico.

4. Formalismo de integrales de camino (alternativa). Formalmente podemos escribir una función generadora (si tratamos G como acción efectiva)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} G[\phi] + \frac{i}{\hbar} \int d^4x J(x)\phi(x)\right),$$

y obtener correladores por derivación funcional respecto. J . En la práctica, para que este tratamiento sea consistente hay que garantizar que $G[\phi]$ tenga la estructura apropiada (convexidad, acotamiento desde abajo, etc.), o bien usar una expansión perturbativa alrededor de una configuración estacionaria válida.

5. Observaciones finales (salvedades físicas).

- La teoría cuántica resultante de $G[\phi]$ es intrínsecamente interactiva; su análisis no perturbativo puede mostrar fenómenos no triviales (solitones, colapso, generación de masas, etc.).
- Es esencial verificar la estabilidad hamiltoniana (que la energía esté acotada inferiormente) para tener una teoría física bien definida. Si \hat{H}_G no es acotada desde abajo, la teoría cuántica puede ser inestable.
- Para cálculos concretos se recomienda: (i) elegir un fondo ϕ_0 conveniente, (ii) expandir en fluctuaciones, (iii) regularizar/renormalizar, y (iv) fijar ordenamiento de operadores.

En resumen: *cuantizar mutuamente* significa utilizar la cuantización canónica o funcional del campo libre de Klein–Gordon como marco de referencia y construir la teoría cuántica interactiva derivada de $G[\phi]$ por expansión perturbativa (o, si es posible, por métodos no perturbativos), cuidando las ambigüedades de ordenamiento, estabilidad y renormalización.

1.11 Funcional Homotópico

Sea \mathcal{F} un espacio adecuado de campos y $\text{Func}(\mathcal{F})$ el espacio de funcionales $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Un *funcional homotópico* es una familia uniparamétrica de funcionales

$$\mathcal{H} : [0, 1] \longrightarrow \text{Func}(\mathcal{F}), \quad s \longmapsto \mathcal{H}_s,$$

donde cada \mathcal{H}_s es un funcional ordinario $\mathcal{H}_s[\phi] := \mathcal{H}(s)[\phi]$. En otras palabras, s parametriza un camino (o una homotopía) en el espacio de funcionales.

Para cada valor de s podemos tomar la derivada funcional usual con respecto al campo:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_s[\phi]}{\delta \phi(x)}.$$

Esto define un objeto de tres variables

$$K(s, x; \phi) := \frac{\delta \mathcal{H}_s[\phi]}{\delta \phi(x)}$$

que depende del parámetro de homotopía s , del punto del espacio-tiempo x , y del campo completo ϕ .

Si imponemos la condición inicial

$$\frac{\delta \mathcal{H}_s[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{s=0} = \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)},$$

para un funcional dado $G[\phi]$, entonces G representa la derivada funcional del funcional homotópico en $s = 0$

1.11.1 Ejemplo de funcional homotópico

Consideremos el funcional

$$G[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \phi(x)^2.$$

Su derivada funcional es

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} = \phi(x).$$

Ahora definimos el funcional homotópico

$$\mathcal{H}_s[\phi] = (1 - s) G[\phi] + s \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \phi(x)^4.$$

Entonces, la derivada funcional de \mathcal{H}_s es

$$\frac{\delta \mathcal{H}_s[\phi]}{\delta \phi(x)} = (1 - s) \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} + s \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int d^d y \phi(y)^4.$$

Calculando explícitamente:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_s[\phi]}{\delta \phi(x)} = (1 - s) \phi(x) + 4s \phi(x)^3.$$

En particular, para $s = 0$:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_0[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{s=0} = \phi(x),$$

que coincide con

$$\frac{\delta \mathcal{H}_0[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{s=0} = \phi(x) = \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)}$$

1.11.2 Ejemplo: Homotopía del funcional de acción de Klein–Gordon

Sea el funcional de acción de un campo escalar $\phi(x)$ en $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right].$$

Definimos un funcional homotópico que interpola entre 0 y $S[\phi]$:

$$\mathcal{H}_s[\phi] := sS[\phi], \quad s \in [0, 1].$$

La derivada funcional para cada s es:

$$\frac{\delta\mathcal{H}_s[\phi]}{\delta\phi(x)} = s \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = s(-\square\phi(x) - m^2\phi(x)),$$

donde $\square = \partial_\mu\partial^\mu$.

Evaluando en $s = 0$ y $s = 1$ obtenemos:

$$\left. \frac{\delta\mathcal{H}_s[\phi]}{\delta\phi(x)} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{\delta\mathcal{H}_s[\phi]}{\delta\phi(x)} \right|_{s=1} = -\square\phi(x) - m^2\phi(x) = \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}.$$

Así, \mathcal{H}_s define un camino lineal en el espacio de funcionales, cuya derivada funcional evoluciona continuamente desde 0 hasta la ecuación de movimiento del campo de Klein–Gordon.

Definición de π_0 funcional

En topología algebraica, para un espacio topológico X :

$$\pi_0(X) = \{\text{componentes conexas por caminos de } X\},$$

es decir, $\pi_0(X)$ clasifica los puntos de X según si pueden unirse mediante un camino continuo.

Espacio de funcionales

Sea:

- Φ el espacio de campos (por ejemplo, todas las funciones suaves $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$),
- $\mathcal{F} = \{S[\cdot] : \Phi \rightarrow \mathbb{R}\}$ el espacio de funcionales de acción que nos interesan, dotado de alguna topología (convergencia puntual, normas Sobolev, etc.).

Dos funcionales $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ estarán en la misma clase de $\pi_0(\mathcal{F})$ si:

$$\exists H : [0, 1] \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(s, \phi) = \mathcal{H}_s[\phi],$$

con

$$H(0, \phi) = S_1[\phi], \quad H(1, \phi) = S_2[\phi],$$

y el mapa $s \mapsto \mathcal{H}_s$ es continuo en la topología elegida.

Definición condensada

$\pi_0(\mathcal{F}) := \{\text{componentes conexas por homotopía del espacio de funcionales } \mathcal{F}\}.$

En otras palabras:

- $\pi_0(\mathcal{F})$ clasifica las *fases funcionales*.
- Cada clase corresponde a un conjunto de acciones que se pueden deformar entre sí de manera continua.
- La existencia de invariantes discretos o cuantizados (números de Chern, niveles de Chern–Simons, ángulos θ , etc.) determina la aparición de distintas clases en $\pi_0(\mathcal{F})$.

Ejemplos

- **Campo escalar libre (Klein–Gordon):** todas las masas y acoplamientos polinómicos se pueden variar suavemente $\Rightarrow \pi_0(\mathcal{F}_{\text{KG}}) \cong \{1\}$.
- **Chern–Simons abeliano en 2+1d:** el nivel $k \in \mathbb{Z}$ está cuantizado $\Rightarrow \pi_0(\mathcal{F}_{\text{CS}}) \cong \mathbb{Z}$.
- **QCD con θ -término:** $\theta \in [0, 2\pi)$ con periodicidad $\Rightarrow \pi_0(\mathcal{F}_\theta) \cong S^1$.
- **Aislantes topológicos (con simetría de tiempo inverso):** sólo dos fases $\theta = 0, \pi \Rightarrow \pi_0(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Interpretación física

El conjunto $\pi_0(\mathcal{F})$ caracteriza el **espacio de fases posibles de una teoría de campos**, clasificando qué acciones pertenecen a la misma fase y cuáles están separadas por barreras topológicas.

Ejemplos de homotopía funcional en baja dimensión

1. Teoría sigma no lineal en 1+1D (teorema de Haldane)

La acción del modelo sigma no lineal es

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + i\theta Q[\mathbf{n}],$$

donde:

- $\mathbf{n}(x) \in S^2$ es un campo unitario,
- $Q[\mathbf{n}] \in \mathbb{Z}$ es la carga topológica (número de winding).

Según el valor de θ :

$$\theta = 2\pi k \Rightarrow \text{fase trivial (espín entero)},$$

$$\theta = (2k+1)\pi \Rightarrow \text{fase topológica (espín semientero)}.$$

Por tanto,

$$\pi_0(\mathcal{F}_{\text{NL}\sigma\text{M}}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

2. Teoría de Chern–Simons en 2+1D

La acción de Chern–Simons para un campo gauge abeliano A_μ es

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ es un entero por consistencia cuántica.

Diferentes valores de k no pueden conectarse suavemente, pues k es un invariante de cohomología. Así:

$$\pi_0(\mathcal{F}_{\text{CS}}) \cong \mathbb{Z}.$$

Cada valor de k corresponde a una fase distinta del efecto Hall cuántico (conductancia Hall cuantizada).

3. Comparación de ejemplos

Dimensión	Acción	Invariante discreto	$\pi_0(\mathcal{F})$	Interpretación física
1+1D NL σ M	$S = \frac{1}{2g} \int (\partial n)^2 + i\theta Q$	$\theta = 0, \pi \pmod{2\pi}$	\mathbb{Z}_2	Espín entero (trivial) vs semientero (topológica/Haldane)
2+1D Chern–Simons	$S = \frac{k}{4\pi} \int A \wedge dA$	$k \in \mathbb{Z}$	\mathbb{Z}	Fases del Hall cuántico (conductancia Hall)
3+1D Yang–Mills + θ	$S_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2} \int F \wedge F$	$\theta \sim \theta + 2\pi$	S^1 (o \mathbb{Z}_2 si T-invariante)	QCD, aislantes topológicos, términos θ

4. Conclusión

Estos ejemplos muestran que el “grupo de homotopía funcional” $\pi_0(\mathcal{F})$ es el análogo matemático de la clasificación topológica de fases en materia condensada:

- 1+1D: fases de Haldane, clasificación \mathbb{Z}_2 .
- 2+1D: fases de efecto Hall cuántico, clasificación entera \mathbb{Z} .
- 3+1D: fases con θ -términos, clasificación continua S^1 o discreta \mathbb{Z}_2 si se impone simetría de tiempo inverso.

1.11.3 Espacio de fases en una teoría de campos

En una teoría de campos el *espacio de fases* es la generalización del concepto clásico a un sistema con infinitos grados de libertad, pues cada campo tiene un valor en cada punto del espacio. Cada punto de este espacio representa un *estado físico completo* en un instante de tiempo.

Analogía con mecánica clásica. Para un sistema mecánico con coordenadas q_i y momentos p_i , el espacio de fases es

$$\Gamma = \{(q_i, p_i) \mid i = 1, \dots, N\}.$$

En una teoría de campos, los “grados de libertad” son las funciones $\phi^a(\mathbf{x})$ definidas en el espacio tridimensional.

Definición canónica. Dado un campo $\phi^a(x)$ en una hipersuperficie espacial Σ , su momento canónico es

$$\pi_a(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^a)}.$$

El espacio de fases se describe entonces como

$$\Gamma = \{(\phi^a(\mathbf{x}), \pi_a(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \Sigma\},$$

donde cada “punto” de Γ es en realidad un par de funciones (ϕ, π) .

Estructura simpléctica. Este espacio posee una forma simpléctica infinito-dimensional

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^3x \delta\pi_a(\mathbf{x}) \wedge \delta\phi^a(\mathbf{x}),$$

que permite definir los corchetes de Poisson funcionales

$$\{\phi^a(\mathbf{x}), \pi_b(\mathbf{y})\} = \delta_b^a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Las ecuaciones de Hamilton se obtienen a partir de un funcional de Hamilton $H[\phi, \pi]$:

$$\dot{\phi}^a(\mathbf{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi_a(\mathbf{x})}, \quad \dot{\pi}_a(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \phi^a(\mathbf{x})}.$$

Significado de las variaciones δ . En la forma simpléctica anterior, el símbolo δ no representa una derivada respecto al tiempo ni una derivada espacio-temporal. Indica el *diferencial en el espacio de configuraciones* (o espacio de fases). Así, $\delta\phi^a(\mathbf{x})$ es una 1-forma que mide cómo cambia un funcional cuando variamos la configuración de campo ϕ en el punto \mathbf{x} , y $\delta\pi_a(\mathbf{x})$ es la variación análoga para el momento conjugado. El producto exterior \wedge construye la 2-forma que define la geometría simpléctica, de manera análoga a $dp \wedge dq$ en mecánica clásica.

Ejemplo: campo escalar libre. Para el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

el momento canónico es $\pi(\mathbf{x}) = \partial_t \phi(\mathbf{x})$ y el espacio de fases consiste en todos los pares de funciones $(\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}))$ que satisfacen las condiciones de caída apropiadas en el infinito.

Restricciones y gauge. Si la teoría posee simetrías de gauge (electromagnetismo, Yang–Mills, etc.), el espacio de fases canónico contiene grados de libertad redundantes. El espacio de fases *físico* se obtiene como el cociente

$$\Gamma_{\text{fís}} = \Gamma / \text{Gauge}.$$

En resumen, las variaciones δ en la forma simpléctica actúan sobre las variables canónicas *como coordenadas del espacio de fases*, no sobre las coordenadas del espacio–tiempo. Son el ingrediente geométrico que permite definir la estructura de Poisson y la evolución hamiltoniana en una teoría de campos.



Figure 1.4: La Biblia de San Luis - El Pantocrátor, Dios Hijo, como Creador del universo.

Chapter 2

Niveles de Realidad

2.1 Fijación Gauge en la Integral de Caminos y el Determinante de Faddeev–Popov

En las teorías Gauge, la presencia de simetrías locales introduce grados de libertad no físicos que hacen que la integral de caminos esté mal definida debido a la sobrecontabilidad de configuraciones equivalentes. Para obtener una formulación consistente de la teoría cuántica, es necesario fijar una condición de Gauge que seleccione una única configuración representativa por cada órbita de la simetría. En este trabajo se revisa el procedimiento de Faddeev–Popov, mediante el cual se inserta en la integral de caminos una identidad construida a partir de una condición de Gauge y su correspondiente jacobiano funcional. Este determinante, conocido como determinante de Faddeev–Popov, corrige precisamente el volumen redundante asociado a la simetría Gauge. Se ilustra el método tanto desde un punto de vista formal como mediante un ejemplo elemental con simetría $SO(2)$, destacando la interpretación geométrica del volumen asociado al grupo de Gauge y su papel en la regularización de la integral de caminos.

Las simetrías Gauge son omnipresentes en la física teórica, especialmente en la física de partículas. Ejemplos conocidos de teorías Gauge son la electrodinámica cuántica (QED) y la cromodinámica cuántica (QCD). Una característica común de las teorías Gauge es la aparición de grados de libertad no físicos en el lagrangiano. Debido a esto, la *integral de caminos o trayectorías* para teorías Gauge carecen de sentido (dando valores infinitos en los cálculos), ya que integrar sobre los parámetros Gauge haría infinitamente valioso el valor de la integral.

Por otro lado, las simetrías de Gauge reflejan redundancias en nuestra descripción de un sistema físico: diferentes configuraciones de campo relacionadas por una transformación de Gauge representan, en realidad, el mismo estado físico. Sin embargo, al escribir la integral de trayectoria

para una teoría Gauge¹ :

$$\mathcal{Z}[A_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \quad (2.3)$$

Donde $S[A_\mu]$ representa el funcional de la teoría se incluidas aquellas que difieren solo por una transformación de Gauge. Debido a que existen infinitas configuraciones equivalentes, la integración las sobreestima: la medida $\mathcal{D}A_\mu$ incluye un volumen infinito correspondiente a las órbitas Gauge. Por eso, la integral de trayectoria es divergente i.e. se vuelve infinito el valor.

Para solucionar esto, se introduce una condición de fijación Gauge que restringe la integral a una órbita representativa por cada órbita de Gauge. Esto se suele hacer mediante el procedimiento de Faddeev-Popov, donde se inserta una función delta que impone una condición (como $G[A_\mu^\theta] := \partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu\theta) = 0$) en el caso de la electrodinámica cuántica denominada *Fijación Gauge*² y se compensa con un determinante —el determinante de Faddeev-Popov— para preservar el valor de la integral. i.e.

$$\mathcal{Z}[A_\mu] := \int \mathcal{D}A_\mu \det\left(\frac{\delta G[A_\mu^\theta]}{\delta\theta}\right) \delta(G[A_\mu^\theta]) e^{iS[A_\mu]} \quad (2.4)$$

Esto es así debido a que

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G[A^\theta]) \det\left(\frac{\delta G[A^\theta]}{\delta\theta}\right). \quad (2.5)$$

donde θ es el grado de libertad dado por la simetría.

Consideremos un ejemplo sencillo de todo lo anterior.

Ejemplo 6. Sea \mathbb{R}^2 con coordenadas cartesianas (x, y) y el cambio de variable a coordenadas polares dado por

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta := \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.6)$$

y consideremos la función Z dado por

$$Z = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-S(r)} \quad (2.7)$$

¹La integral de trayectorias puede definirse formalmente como el límite de un producto de integrales ordinarias obtenido al discretizar el espacio-tiempo. Para un campo ϕ definido en una región con N puntos de una discretización (lattice), la acción $S[\phi]$ se aproxima por una función $S_N(\phi_1, \dots, \phi_N)$ y la medida funcional por el producto de medidas ordinarias. La integral de trayectorias se define entonces como el límite

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} d\phi_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} d\phi_N \exp(i S_N(\phi_1, \dots, \phi_N)) \right), \quad (2.1)$$

cuando la partición se hace infinitamente fina. Formalmente esto se escribe como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}. \quad (2.2)$$

²Gauge Fixing en la literatura.

donde $S(r)$ es una función que depende únicamente del radio i.e. preserva una simetría Gauge con respecto a las rotaciones $SO(2)$. Mediante el teorema de cambio de variable. Podemos escribir la ecuación anterior en términos de las variables (r, θ) . De esta forma tenemos

$$Z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r dr d\theta) e^{-S(r)} = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^\infty r dr e^{-S(r)} \quad (2.8)$$

El factor $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ es el Volumen (en este caso finito) del Grupo de Gauge i.e

$$\text{Vol}(SO(2)) = 2\pi \quad (2.9)$$

Cálculo del volumen de $SO(2)$

Sea (M, g) una variedad Riemanniana suave de dimensión n . El *volumen* de M inducido por la métrica g se define como

$$\text{Vol}(M) = \int_M dV_g, \quad (2.10)$$

donde dV_g es la forma de volumen asociada a g . En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) se tiene

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (2.11)$$

y por tanto

$$\text{Vol}(M) = \int_M \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (2.12)$$

Recordemos que $SO(2)$ es difeomorfa al círculo unitario S^1 . Una parametrización conveniente es

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.13)$$

Bajo la identificación $SO(2) \simeq S^1$ podemos tomar la parametrización del círculo unitario en \mathbb{R}^2

$$\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (2.14)$$

La derivada respecto. de θ es

$$\mathbf{x}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad (2.15)$$

y su norma euclídea es

$$\|\mathbf{x}'(\theta)\| = \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} = 1. \quad (2.16)$$

La métrica inducida en la coordenada θ es por tanto $g_{\theta\theta} = 1$. El elemento de volumen (en este caso elemento de longitud, 1-forma de volumen) es

$$dV_g = \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = 1 \cdot d\theta. \quad (2.17)$$

Finalmente, el volumen (longitud) de $\text{SO}(2)$ es

$$\text{Vol}(\text{SO}(2)) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (2.18)$$

Observación. Si se elige otra normalización de la métrica (por ejemplo una constante de escala en la forma bilineal definida en la álgebra de Lie), el valor numérico puede escalarse proporcionalmente. Con la métrica inducida por la inclusión natural en \mathbb{R}^2 (o con la métrica bi-invariante normalizada de modo estándar) el resultado es 2π .

Derivación de Faddeev–Popov

La idea de Faddeev–Popov consiste en insertar “1” de forma que se elimine la integral sobre la dirección de simetría y se sustituya por un jacobiano, el determinante de Faddeev–Popov. Concretamente:

1. Seleccionamos una condición de gauge. En nuestro ejemplo consideremos $\theta_0 := 0$.
2. Recordemos que la función delta de Dirac posee las siguientes propiedades:

$$\int \delta(x - y) f(x) dx = f(y), \quad (2.19)$$

y que

$$\delta(f(x))_u = \sum_{x_i=f^{-1}(0)} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} u := \int \sum_{x_i=f^{-1}(0)} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} u(x) dx, \quad (2.20)$$

donde $u(x)$ es una *función test* de soporte compacto, es decir, $u(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

De esta forma, en el caso de un número finito de grados de libertad³

³En mecánica cuántica no relativista, un sistema físico típico posee un número finito de grados de libertad, usualmente descritos por un conjunto finito de coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados. Sin embargo, en una teoría cuántica de campos (TQC) el objeto fundamental ya no es un conjunto discreto de variables, sino un campo definido sobre el espacio o el espacio-tiempo. Esto implica que el sistema tiene efectivamente un número infinito de grados de libertad, uno por cada punto espacial, o de manera equivalente, uno por cada modo independiente en una descomposición espectral (por ejemplo, una expansión en modos de Fourier).

La referencia a “grados finitos de libertad” dentro del marco de TQC aparece generalmente en contextos aproximados o efectivos. Por ejemplo, al discretizar el espacio en una red espacial (como en teorías de gauge en el lattice), el campo queda representado por un número finito, aunque grande, de variables definidas en los sitios o enlaces de la red. De forma análoga, en aproximaciones de espacio de Hilbert truncado se retiene solo un subconjunto finito de modos, típicamente los de baja energía o baja frecuencia, descartando los demás. En las teorías efectivas, los modos de alta energía se integran fuera, lo que produce una descripción con un número finito de parámetros relevantes para la escala de energía considerada.

En todos estos casos, el sistema deja de poseer el carácter estrictamente infinitodimensional de una TQC completa y adquiere una descripción con un número finito de grados de libertad. No obstante, el límite continuo o el límite de alta energía restaura el comportamiento fundamentalmente infinitodimensional propio de la teoría cuántica de campos.

Ejemplo de Faddeev–Popov en $SO(2)$

Sea $G(R_\alpha)$ una función escalar que selecciona un representante en cada órbita de la simetría. En el ejemplo de una variable angular, tomamos:

$$G(R_\alpha) = \theta + \alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad (2.21)$$

donde $\theta(x, y)$ es el ángulo asociado al punto (x, y) y α es la rotación por el ángulo α . De este modo, la condición de gauge queda fijada por $G(R_\alpha) = 0$, cuyo único punto fijo es $\theta = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

La integral de Faddeev–Popov se define como:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(G(R_\alpha)) \left| \frac{\partial G(R_\alpha)}{\partial \alpha} \right|, \quad (2.22)$$

donde $\delta_{2\pi}$ es la *delta periódica* definida por

$$\delta_{2\pi}(\phi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\phi - 2\pi n). \quad (2.23)$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\partial G(R_\alpha)}{\partial \alpha} = 1. \quad (2.24)$$

Luego, la integral queda:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(\alpha + \theta) = \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\alpha + \theta - 2\pi n) \quad (2.25)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\alpha \delta(\alpha + \theta - 2\pi n). \quad (2.26)$$

La delta de Dirac ordinaria $\delta(\alpha + \theta - 2\pi n)$ solo contribuye si su argumento se anula, es decir:

$$\alpha + \theta - 2\pi n = 0 \Rightarrow \alpha = 2\pi n - \theta. \quad (2.27)$$

Pero $\alpha \in [0, 2\pi]$, por lo que solo existe un entero n_0 tal que $2\pi n_0 - \theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto, de toda la suma solo un término contribuye. Evaluando la integral de la delta ordinaria:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta(\alpha + \theta - 2\pi n_0) = 1. \quad (2.28)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(\alpha + \theta) = 1. \quad (2.29)$$

En este ejemplo simple de $SO(2)$, la integral sobre la dirección de simetría queda eliminada y la medida original en coordenadas polares se conserva:

$$dx dy = r dr d\theta.$$

Generalización a Teorías Cuánticas de Campos

En el caso de un número infinito de grados de libertad, la generalización funcional es:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G[A^\theta]) \det \left(\frac{\delta G[A^\theta]}{\delta \theta} \right). \quad (2.30)$$

Esto nos permite, finalmente, definir la integral de caminos *modulo* la fijación de gauge:

$$\boxed{\mathcal{Z}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}A_\mu \delta(G[A_\mu^\alpha]) \det \left(\frac{\delta G[A_\mu^\alpha]}{\delta \alpha} \right) e^{iS[A_\mu]}.} \quad (2.31)$$