Regiones Acausalmente Desconectadas en Teoría Cuántica de Campos Algebraica

Omar Corona Tejeda

omarct1989@ciencias.unam.mx

08 de Diciembre del 2025

Abstract

En el marco de la Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT), los observables se asocian a regiones del espacio-tiempo en lugar de puntos individuales, lo que permite una descripción algebraica consistente con la relatividad especial. Se introduce el concepto de *net de álgebras locales*, cumpliendo los axiomas de Haag–Kastler: isotonía, covariancia, localidad y normalización. La localidad asegura que los observables asociados a regiones acausalmente desconectadas conmutan, garantizando que no exista influencia causal entre ellas. Como ejemplo, se analiza el campo escalar libre de Klein–Gordon, demostrando que su conmutador se anula para separaciones acausales debido a la invariancia de Lorentz y las relaciones de conmutación canónicas, lo que motiva y respalda la estructura algebraica de AQFT. Este enfoque muestra cómo la causalidad se incorpora de manera natural en la teoría cuántica de campos mediante la formalización algebraica de regiones acausales.

1 Regiones acausalmente desconectadas en M

En *Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT)*, el enfoque no se basa directamente en campos definidos en cada punto del espacio-tiempo, sino en *observables asociados a regiones del espacio-tiempo*. La estructura fundamental es un *net de álgebras locales*:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}), \tag{1}$$

donde $\mathcal{O} \subset M$ es una región abierta del espacio de Minkowski y $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es la álgebra de observables que se pueden medir en $\mathcal{O}$. En orden de definir lo anterior es necesario considerar lo siguiente:

Definición 1.1 (Regiones acausalmente desconectadas)**.** *Sea (M, g) un espaciotiempo lorentziano. Dos regiones abiertas $O_1, O_2 \subset M$ se dicen* acausalmente desconectadas *si ningún punto de O_1 puede estar conectado con un punto de O_2 mediante una curva causal (ni nula ni temporal). Formalmente,*

$$J(O_1) \cap O_2 = \emptyset, \qquad J(O_2) \cap O_1 = \emptyset. \tag{2}$$

Aquí $J(O)$ denota el conjunto causal *de O, definido como*

$$J(O) := J^{+}(O) \cup J^{-}(O), \tag{3}$$

donde $J^+(O)$ es el futuro causal de O (todos los puntos a los que puede llegarse desde O por curvas causales dirigidas al futuro) y $J^-(O)$ es el pasado causal de O (todos los puntos desde los que puede llegarse a O por curvas causales dirigidas al pasado).

Remark 1. *Los conjuntos acausalmente desconectados representan regiones del espaciotiempo que son físicamente independientes: ninguna señal, ni siquiera luminosa, puede propagarse de una a la otra. En el marco de la AQFT, esta independencia se refleja en la condición de localidad o microcausalidad, según la cual los observables asociados a dichas regiones conmutan:*

$$[A, B] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}(O_1),\, B \in \mathcal{A}(O_2). \tag{4}$$

Geométricamente, esto corresponde a que los conos de luz de una región no alcanzan a la otra, como ocurre con dos diamantes causales separados en el espacio de Minkowski.

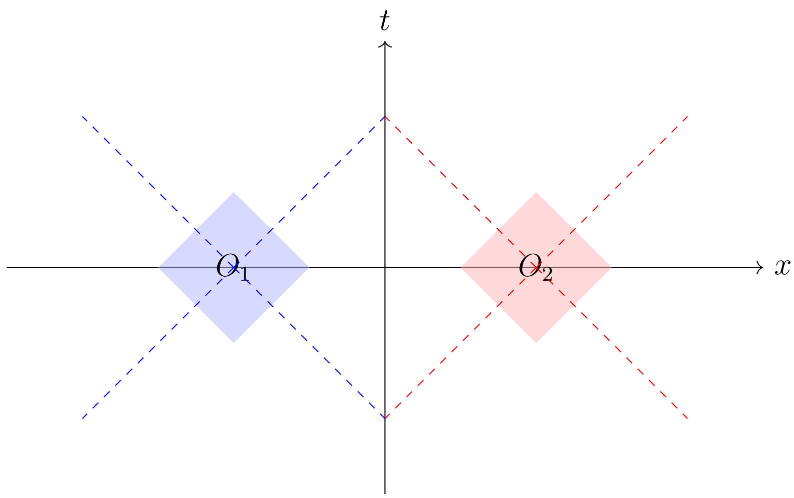

Figure 1: Ejemplo de dos regiones O_1 y O_2 acausalmente desconectadas en $\mathbb{M}^{1,1}$.

Nota: En este diagrama se muestran dos regiones en forma de diamante O_1 (azul) y O_2 (rojo). Cada una tiene asociado su cono de luz (líneas punteadas). Se observa que los conos causales de O_1 y O_2 no se intersectan, es decir:

$$J(O_1) \cap O_2 = \emptyset, \qquad J(O_2) \cap O_1 = \emptyset, \tag{5}$$

lo que implica que O_1 y O_2 están acausalmente desconectadas.

El siguiente teorema muestra que no existe una partición por conjuntos acausamente desconectados de $\mathbb{M}^{1,1}$

Theorem 1.1. *No existe una partición de $M = \mathbb{M}^{1,1}$ en regiones $\{O_i\}_{i \in I}$ tales que*

1. *$M = \bigsqcup_{i \in I} O_i$ (cubran todo el espacio de Minkowski),*
2. *$O_i \perp O_j$ para todo $i \neq j$ (mutuamente acausalmente desconectadas),*

donde $O_i \perp O_j$ significa que $J(O_i) \cap O_j = \emptyset$ y $J(O_j) \cap O_i = \emptyset$

Proof. Supongamos, por contradicción, que existe tal partición $\{O_i\}_{i\in I}$.

Paso 1: Punto inicial y restricción de acausalidad. Sea $p_0 = (0,0) \in M$ y sea O_0 la región que lo contiene. Por acausalidad, cualquier otra región $O_j \neq O_0$ debe cumplir

$$O_j \cap J(O_0) = \emptyset. \tag{6}$$

Es decir, ninguna otra región puede contener puntos dentro del cono de luz de p_0.

Paso 2: Interior del cono de luz de p_0. El interior del cono de luz de p_0 es

$$C_0 = \{(t,x) \in M : |x| < |t|\}. \tag{7}$$

Por la definición de partición, todos los puntos de C_0 deben pertenecer a alguna región de la partición. Dado que ninguna otra región puede intersectar C_0, necesariamente

$$C_0 \subset O_0. \tag{8}$$

Paso 3: Otro punto fuera de O_0. Sea $p_1 \in M \setminus O_0$ y sea O_1 la región que lo contiene. Aplicando el mismo razonamiento, todos los puntos dentro del cono de luz de p_1 deben pertenecer a O_1:

$$C_1 = \{(t,x) \in M : |x - x_1| < |t - t_1|\} \subset O_1. \tag{9}$$

Paso 4: Solapamiento de conos. Los conos de luz C_0 y C_1 se solapan en algún punto $q \in M$. Entonces $q \in O_0 \cap O_1$, lo cual viola la definición de partición, ya que cada punto debe pertenecer a una única región.

Conclusión. Como cualquier intento de cubrir todo M conduce a este conflicto, se sigue que no es posible particionar M en regiones mutuamente acausales. □

Claramente la anterior argumentación sirve para el espacio general de Minkowski $\mathbb{M}^{1,n}$.

Theorem 1.2. *No existe una partición por conjuntos acausamente desconectados de* $\mathbb{M}^{1,n}$

2 Regiones acausalmente desconectadas en Teoría Cuántica de Campos Álgebraica (AQFT)

Para cumplir el *principio de causalidad*, dos regiones acausalmente desconectadas $O_1 \perp O_2$ deben tener observables que conmutan:

$$[A_1, A_2] = 0, \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}(O_1),\, A_2 \in \mathcal{A}(O_2). \tag{10}$$

Esto asegura que medir un observable en O_1 no afecta ningún observable en O_2, coherente con la relatividad especial.

2.1 Net de álgebras locales

El formalismo algebraico se basa en una red (net) de álgebras $\{\mathcal{A}(O)\}_{O\subset M}$ que satisface los siguientes axiomas básicos (Haag–Kastler).

Definición 2.1 (Net de álgebras de observables)**.** *Sea (M, g) un espaciotiempo lorentziano. Una* net *(o red) de álgebras de observables es una asignación que a cada región abierta acotada $O \subset M$ le asocia una C^*-álgebra $\mathcal{A}(O)$ de operadores, de manera que se cumplen los siguientes axiomas (Haag–Kastler):*

1. ***Isotonía:*** *Si $O_1 \subset O_2$, entonces*

$$\mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2). \tag{11}$$

2. ***Covariancia:*** *Existe una representación del grupo de simetrías del espaciotiempo (por ejemplo, el grupo de Poincaré en el caso de $M = \mathbb{M}^{1,3}$) en automorfismos de la red:*

$$U(g)\,\mathcal{A}(O)\,U(g)^{-1} = \mathcal{A}(gO), \quad g \in \mathrm{Iso}(M, g). \tag{12}$$

3. ***Localidad (o microcausalidad):*** *Si O_1 y O_2 son regiones acausalmente desconectadas, entonces los observables asociados con ellas conmutan:*

$$[A, B] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}(O_1),\, B \in \mathcal{A}(O_2). \tag{13}$$

4. ***Normalización:*** *Existe una C^*-álgebra global de observables*

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{O \subset M} \mathcal{A}(O)}^{\|\cdot\|}, \tag{14}$$

generada por todas las subálgebras locales.

Los observables en regiones acausales se pueden medir simultáneamente de manera consistente. En AQFT, esto reemplaza la idea tradicional de "valores de campos en cada punto" por una estructura algebraica que respeta la causalidad. Por ello, los sets acausales son la piedra angular de la construcción de AQFT, garantizando que la teoría sea consistente con la relatividad especial.

2.2 El Campo de Klein-Gordon ψ

En la sección anterior definimos el net de álgebras locales satisfaciendo los axiomas de Haag-Kastler. En esta parte usaremos nuevamente el campo de Klein-Gordon como motivación para dichos axiomas.

Consideremos el lagrangiano del campo de Klein–Gordon en espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas inerciales:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \tfrac{1}{2}\left[(\partial_t \phi)^2 - |\nabla \phi|^2 - m^2 \phi^2\right]. \tag{15}$$

En el formalismo hamiltoniano[1] definimos el momento canónico conjugado como la derivada funcional del lagrangiano respecto a la velocidad del campo:

$$\pi(t, \vec{x}) := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi(t, \vec{x}))}. \tag{18}$$

[1]El formalismo hamiltoniano de campos es una extensión del formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica a sistemas con infinitos grados de libertad, como los campos. En este formalismo, se introduce el *momento canónico conjugado* $\pi(\vec{x}, t)$ asociado a cada campo $\phi(\vec{x}, t)$ mediante derivadas funcionales del lagrangiano respecto a la derivada

Para el lagrangiano de Klein–Gordon esto nos da

$$\pi(t,\vec{x}) = \partial_t \phi(t,\vec{x}), \tag{19}$$

mostrando que el momento conjugado depende funcionalmente de la historia del campo a través de su derivada temporal.

La densidad hamiltoniana se define mediante la transformada de Legendre[2] funcional:

$$\mathcal{H}[\phi,\pi] \;=\; \int d^3x\, \pi(t,\vec{x})\, \partial_t\phi(t,\vec{x}) - \mathcal{L}[\phi,\partial_\mu\phi]. \tag{21}$$

Sustituyendo $\pi = \partial_t\phi$ y el lagrangiano, se obtiene

$$\mathcal{H}[\phi,\pi] = \tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{22}$$

Finalmente, el Hamiltoniano total del sistema se expresa como

$$H[\phi,\pi] = \int d^3x\, \mathcal{H}[\phi,\pi] = \int d^3x\, \left[\tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \tag{23}$$

De esta forma, el Hamiltoniano representa la energía total del campo, donde cada término refleja una contribución distinta: la energía cinética temporal, la energía espacial y la energía de masa, con la dependencia funcional explícita del campo y su momento conjugado.

Al *cuantizar canónicamente*[3] el campo de Klein–Gordon, promovemos el campo clásico $\phi(\vec{x},t)$ y su momento conjugado $\pi(\vec{x},t)$ a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert del sistema.

---

temporal del campo. La dinámica del sistema se describe entonces en términos del Hamiltoniano

$$H[\phi,\pi] = \int d^3x\, \mathcal{H}[\phi,\pi], \tag{16}$$

donde $\mathcal{H}$ es la densidad hamiltoniana. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de las *ecuaciones de Hamilton* funcionales:

$$\partial_t\phi(t,\vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta\pi(t,\vec{x})}, \qquad \partial_t\pi(t,\vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta\phi(t,\vec{x})}, \tag{17}$$

de forma análoga a la mecánica clásica, mostrando cómo evoluciona el campo y su momento conjugado en el tiempo.

[2]Dada una función suave $f(x)$, su transformada de Legendre $g(p)$ se define a partir de la condición diferencial

$$p = \frac{df}{dx} \tag{20}$$

de modo que $g(p) = p\,x - f(x)$ con x expresado implícitamente en términos de p mediante $p = \frac{df}{dx}$.

[3]La cuantización canónica consiste en pasar de un sistema clásico, descrito por un lagrangiano o un Hamiltoniano y sus corchetes de Poisson, a un sistema cuántico, en el que los observables se representan por operadores sobre un espacio de Hilbert. De manera general, si $f[\phi,\pi]$ y $g[\phi,\pi]$ son funciones funcionales de los campos $\phi(t,\vec{x})$ y sus momentos conjugados $\pi(t,\vec{x})$, la cuantización canónica se define mediante la regla

$$\{f,g\}_{\text{Poisson}} \;\longrightarrow\; \frac{1}{i\hbar}\,[\hat{f},\hat{g}], \tag{24}$$

donde $[\hat{f},\hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ es el conmutador de operadores. Esta correspondencia asegura que las relaciones algebraicas del sistema clásico se respetan en la versión cuántica. En particular, para los campos y sus momentos conjugados se obtiene la relación canónica fundamental

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})] = i\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{25}$$

y los demás conmutadores entre campos o entre momentos en distintos puntos espaciales se anulan. Este procedimiento es la base para construir la teoría cuántica de campos, permitiendo la descripción de fenómenos como la creación y destrucción de partículas.

Estos operadores satisfacen las siguientes *relaciones de conmutación canónicas*:

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\phi}(t,\vec{y})]=0, \qquad [\hat{\pi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})]=0, \qquad [\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})]=i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{26}$$

La primera relación indica que los operadores de campo en distintos puntos del espacio conmutan entre sí, reflejando que no existen restricciones directas entre los valores del campo en lugares distintos al mismo tiempo. De manera análoga, los momentos conjugados en distintos puntos también conmutan. La tercera relación, conocida como la *relación canónica fundamental*, codifica la dependencia funcional entre el campo y su momento conjugado en el mismo punto, y es la que garantiza que la cuantización respete la estructura hamiltoniana del sistema. La delta de Dirac tridimensional[4] $\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ asegura que la conmutación es local, es decir, sólo ocurre cuando los puntos espaciales coinciden.

2.3 Conmutador del campo de Klein-Gordon en dos puntos

Sea $\phi(x)$ un campo escalar libre de masa m de Klein-Gordon. Definimos el conmutador en dos puntos $x, y \in M$ como

$$[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)] \equiv \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)-\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x). \tag{29}$$

1. Expansión en modos del campo

El campo $\hat{\phi}(x)$ puede escribirse mediante los operadores de creación y destrucción de energía[5] como:

$$\boxed{\hat{\phi}(x)=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right),} \tag{31}$$

[4]La delta de Dirac tridimensional $\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ es una función distribución definida por:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3k, \tag{27}$$

que cumple la propiedad

$$\int d^3x\, f(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{y}) \tag{28}$$

para cualquier función test $f(\vec{x})$ suficientemente suave. En el contexto de la cuantización de campos, asegura que las relaciones de conmutación canónica son locales: el campo $\hat{\phi}(t,\vec{x})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t,\vec{y})$ sólo conmutan de manera no trivial cuando los puntos espaciales coinciden, es decir, $\vec{x}=\vec{y}$. Esto refleja que las interacciones inmediatas sólo ocurren en el mismo punto del espacio.

[5]La descomposición del campo escalar $\phi(x)$ en términos de operadores de creación y aniquilación se basa en la expansión en modos de Fourier, aprovechando que el campo libre satisface la ecuación de Klein-Gordon. Cualquier solución $\phi(x)$ puede expresarse como superposición de ondas planas

$$\phi(x)=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(a_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right), \quad \omega_{\vec{k}}=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}. \tag{30}$$

Aquí, $a_{\vec{k}}$ y $a^{\dagger}_{\vec{k}}$ son operadores que eliminan o crean una excitación con momento $\vec{k}$ y energía $\omega_{\vec{k}}$. Esta construcción garantiza que cada modo de onda se comporte como un *oscilador armónico cuántico independiente*, de manera que el campo completo se puede interpretar como un conjunto de osciladores armónicos cuánticos, donde las excitaciones corresponden a partículas de masa m.

donde $k\cdot x=\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x}$, $\omega_{\vec{k}}=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$, y los operadores de creación y aniquilación satisfacen

$$\boxed{[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q}),\quad [\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}_{\vec{q}}]=[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}]=0.} \tag{32}$$

2. Cálculo del conmutador

De esta forma utilizando las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)] &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)-\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\\
&=\left[\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right),\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}}\left(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-ik\cdot y}+\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot y}\right)\right]\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}}\left[\hat{a}_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}e^{ik\cdot x},\hat{a}_{\vec{q}}e^{-ik\cdot y}+\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot y}\right]\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}}\left\{[\hat{a}_{\vec{k}},a^\dagger_{\vec{q}}]e^{-ik\cdot x}e^{iq\cdot y}+[a^\dagger_{\vec{k}},a_{\vec{q}}]e^{ik\cdot x}e^{-iq\cdot y}\right\}\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}}\left[(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})]e^{-ik\cdot x}e^{iq\cdot y}-(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})]e^{ik\cdot x}e^{iq\cdot y}\right]\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left[\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left((2\pi)^3e^{-ikx}e^{iky}-(2\pi)^3e^{ikx}e^{-iky}\right)\right]\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}\right)
\end{aligned}\tag{33}$$

obtenemos que los únicos términos no nulos son los cruzados $a_{\vec{k}}$ y $a^\dagger_{\vec{q}}$. Así,

$$[\phi(x),\phi(y)]=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}\right). \tag{34}$$

3. Anulación del conmutador en separación acausal

Consideremos un campo escalar cuántico $\hat{\phi}(x)$ en el espaciotiempo de Minkowski. Las relaciones de conmutación canónicas a igual tiempo son

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\phi}(t,\vec{y})]=0,\qquad [\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})]=i\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{35}$$

donde $\hat{\pi}(t,\vec{x})$ es el momento conjugado de $\hat{\phi}(t,\vec{x})$.

Separación espaciotemporal acausal

Dos puntos del espaciotiempo $x=(t,\vec{x})$ y $x'=(t',\vec{x}')$ se dicen *acausalmente separados* (espacialmente) si

$$(x-x')^2=(t-t')^2-|\vec{x}-\vec{x}'|^2<0. \tag{36}$$

Físicamente, esto significa que ninguna señal puede propagarse de un evento al otro sin superar la velocidad de la luz; por lo tanto, no pueden influenciarse causalmente.

Existencia de un sistema de referencia de simultaneidad

Para una separación acausal siempre es posible encontrar un sistema inercial en el que ambos eventos ocurran simultáneamente:

$$t_{\text{nuevo}} = t'_{\text{nuevo}}. \tag{37}$$

Esto se debe a que el intervalo es espaciado ($|\vec{x} - \vec{x}'| > |t - t'|$), y se puede realizar un *boost* de Lorentz[6] a lo largo de la dirección $\vec{x} - \vec{x}'$ que "incline" los hiperplanos de simultaneidad, colocando ambos eventos en la misma hoja temporal.

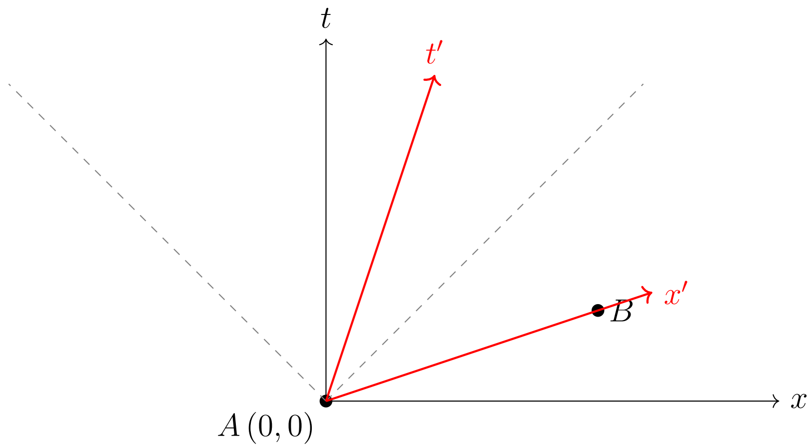

Figure 2: Los Eventos A y B son simultaneos en el sistema de refencia (t', x').

Conmutadores a igual tiempo

En este sistema de referencia, las relaciones de conmutación canónicas implican que

$$[\hat{\phi}(t_{\text{nuevo}}, \vec{x}_{\text{nuevo}}), \hat{\phi}(t_{\text{nuevo}}, \vec{y}_{\text{nuevo}})] = 0, \tag{39}$$

ya que los dos puntos están al mismo tiempo pero en distintas posiciones espaciales.

Invariancia de Lorentz

El conmutador de campos escalares es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = [\hat{\phi}(\Lambda x), \hat{\phi}(\Lambda x')] \tag{40}$$

para cualquier transformación de Lorentz Λ. Por lo tanto, si el conmutador se anula en un sistema, se anula en todos los sistemas de referencia.

[6] Un *boost* de Lorentz es una transformación lineal que mezcla las coordenadas de espacio y tiempo de manera que se conserva la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Por ejemplo, un boost a lo largo del eje x con velocidad v se escribe

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{38}$$

y deja invariante el intervalo de Minkowski $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. i.e. $(ds') = ds$. En teoría cuántica de campos, los operadores de campo $\phi(x)$ transforman bajo boosts como $\phi'(x') = \phi(x)$, asegurando que los conmutadores de campos sean invariantes.

Proof. Sea un campo escalar cuántico $\hat{\phi}(x)$. Su conmutador se define como

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] := \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x). \tag{41}$$

Bajo una transformación de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda x$, un campo escalar se transforma como

$$\hat{\phi}(x) \longrightarrow \hat{\phi}'(x') = \hat{\phi}(\Lambda^{-1}x'). \tag{42}$$

Evaluemos el conmutador en los puntos transformados:

$$[\hat{\phi}'(x'), \hat{\phi}'(y')] = [\hat{\phi}(\Lambda^{-1}x'), \hat{\phi}(\Lambda^{-1}y')] \tag{43}$$

$$= [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \quad (\text{definiendo } x = \Lambda^{-1}x',\, y = \Lambda^{-1}y'). \tag{44}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\phi}(\Lambda x), \hat{\phi}(\Lambda y)], \tag{45}$$

es decir, el conmutador de un campo escalar es **invariante bajo transformaciones de Lorentz**[7]. □

Conclusión

Combinando estos resultados, concluimos que para puntos acausalmente separados, los operadores de campo siempre conmutan:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = 0 \quad \text{si } (x - x')^2 < 0. \tag{47}$$

Esto garantiza el principio de causalidad en teoría cuántica de campos: los observables que no pueden influenciarse mutuamente deben conmutar.

Es decir:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \Big(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}\Big), & \text{si } (x-y)^2 \geq 0 \text{ (causalmente conectados)} \\ 0, & \text{si } (x-y)^2 < 0 \text{ (acausales)} \end{cases} \tag{48}$$

□

En el ejemplo anterior, haciendo uso del campo de Klein-Gordon ψ, fue posible motivar la definición de una red de álgebras locales. Dos puntos del espacio-tiempo x, y que se encuentran causalmente conectados y dentro del dominio de definición del campo tienen conmutador no trivial.

[7] Esta prueba depende crucialmente de que el campo ϕ sea escalar. Para campos con índices (vectores, tensores, espinores), aparecen factores de Λ que modifican la forma del conmutador:

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] \longrightarrow [A'^\mu(x'), A'^\nu(y')] = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta [A^\alpha(x), A^\beta(y)]. \tag{46}$$